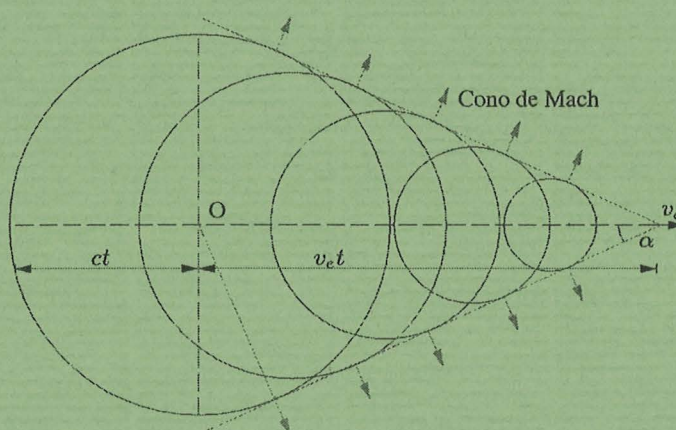


VIBRACIONES Y ONDAS (II)

MOVIMIENTO ONDULATORIO

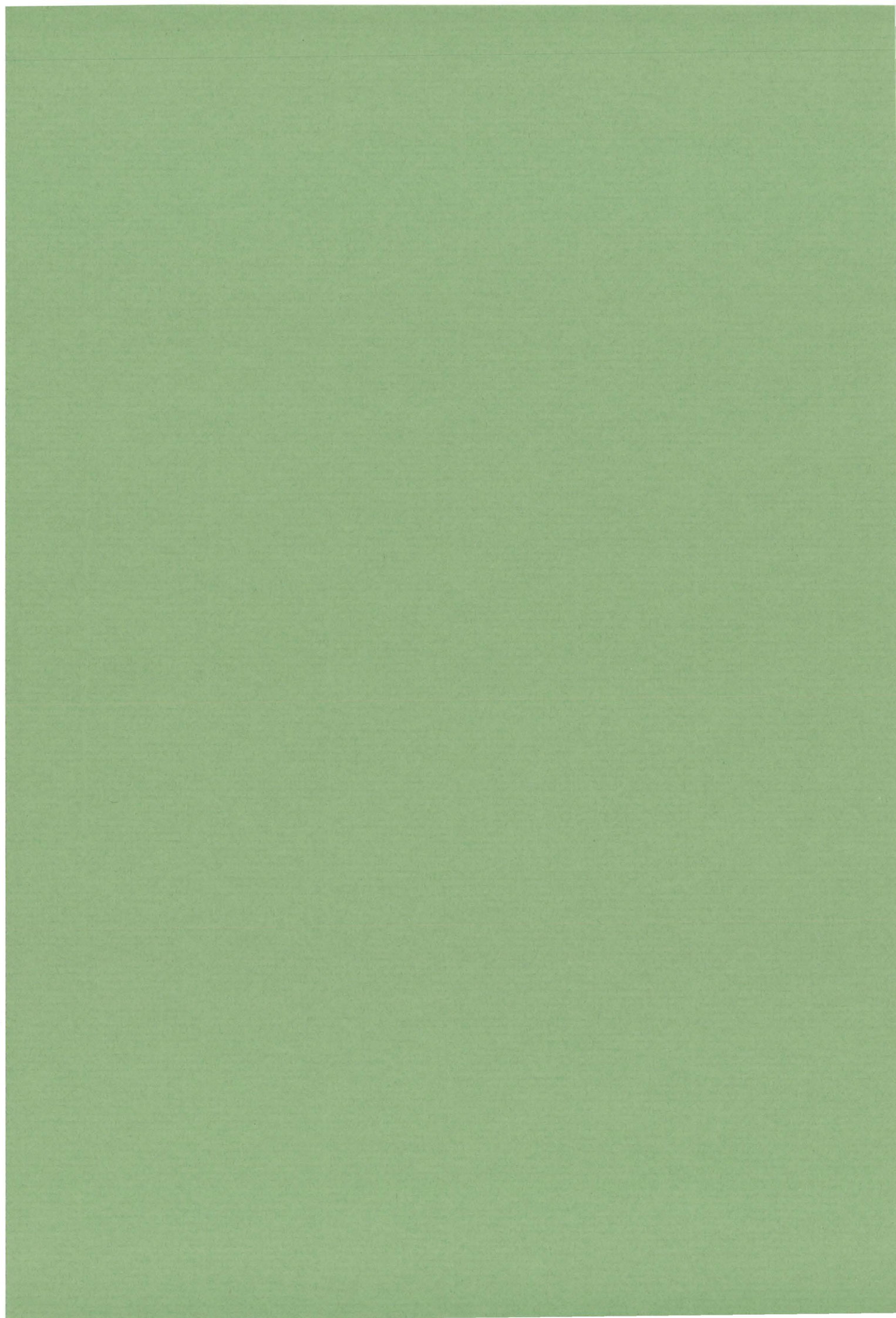
por

AGUSTÍN MARTÍN DOMINGO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-74-02



VIBRACIONES Y ONDAS (II)
MOVIMIENTO ONDULATORIO

por

AGUSTÍN MARTÍN DOMINGO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-74-02

**CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA**

NUMERACIÓN

- 3 Área
- 74 Autor
- 01 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

- 0 VARIOS
- 1 ESTRUCTURAS
- 2 CONSTRUCCIÓN
- 3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
- 4 TEORÍA
- 5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
- 6 PROYECTOS
- 7 URBANISMO
- 8 RESTAURACIÓN

Vibraciones y ondas (II)

Movimiento ondulatorio

2008 Agustín Martín Domingo

Instituto Juan de Herrera.

Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.

Gestión y portada: Lucía Alba Fernández

CUADERNO 249.01/ 3-74-02

ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-251-2

ISBN-13: 978-84-9728-259-8

Depósito Legal: M-8080-2008

Capítulo 1

Movimiento ondulatorio

1.1. Concepto de onda que se propaga. Frente de onda.

Se denomina *onda* a cualquier perturbación del equilibrio que se propaga de un punto a otro del espacio. Las ondas están presentes en multitud de fenómenos de la vida cotidiana. Podemos, en una cuerda tensa retorcer un extremo o dar un tirón, o producir una variación brusca de presión en un punto de un gas, y esta perturbación se propagará a lo largo del sistema. Por ejemplo, el sonido de la voz humana no es más que una perturbación de las condiciones de equilibrio producida en las cuerdas vocales, que se propaga por el espacio y es detectada en el oído de otra persona. Las ondas luminosas también son una perturbación de las condiciones de equilibrio que se propaga por el espacio. Otro ejemplo de ondas serían las olas de agua que se acercan a la costa o las pequeñas ondas que se propagan por la superficie del agua. Nótese que en ningún caso de las ondas mecánicas que hemos visto la materia viaja, sino solo su estado de movimiento, hay transporte de energía y momento en el espacio, pero no de materia.

Se denomina *frente de onda* al lugar geométrico de los puntos del espacio sometidos al mismo estado de perturbación (La perturbación en todos esos puntos es la misma y tiene la misma fase). La dirección de propagación siempre es perpendicular al frente de ondas. Se denomina a la onda *onda plana* cuando el frente de ondas es plano. Dependiendo de la forma del frente de onda las ondas pueden también ser esféricas, cilíndricas, etc ... Las ondas planas y las esféricas tienen una especial importancia y por ello se les dedicará un mayor espacio.

Asimismo distinguiremos entre ondas *longitudinales* y *transversales*. En las ondas longitudinales, la dirección en la cual varía la magnitud que define la perturbación coincide con la dirección de propagación de la misma, mientras que en las ondas transversales, la dirección de variación de esta magnitud es normal a la dirección de propagación. El sonido propagándose en un gas es un ejemplo de onda longitudinal, mientras que una onda electromagnética o una onda que se propaga a lo largo de una cuerda tensa son ejemplos de ondas transversales. En algunos casos estos dos tipos de ondas van combinados, como ocurre con las ondas sísmicas.

1.2. Descripción matemática de la propagación para una onda plana

Consideremos una función representada por la curva central de la figura 1-1. Reemplazando la variable x por $x - a$ con a una cantidad positiva, se tiene la función de la derecha. La forma de la función no ha cambiado, pero sí dónde está su origen. Se tienen los mismos valores de la función, pero para puntos desplazados hacia la derecha una cantidad a . De forma similar se tiene que al reemplazar en la función original x por $(x + a)$, la función es la misma, pero desplazada hacia la izquierda una cantidad a .

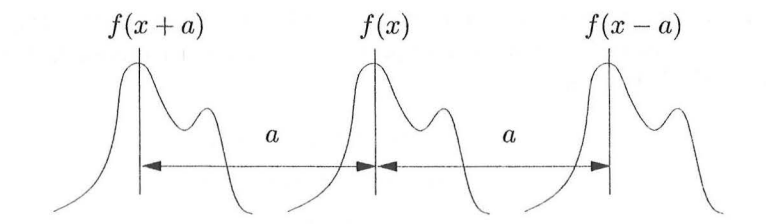


Figura 1-1 Descripción matemática de la propagación de una onda

Si en vez de la constante positiva a hubiéramos utilizado ct , donde t es el tiempo y c una velocidad, se tendría que $f(x - ct)$ correspondería a la curva original, pero viajando sin deformación hacia la derecha a una velocidad c . Análogamente, $f(x + ct)$ correspondería a la función original desplazándose sin deformación hacia la izquierda con una velocidad $-c$. Denominamos *perfil de onda* a la representación de $f(x \pm ct)$ en un instante dado.

Así, una expresión matemática de la forma

$$\chi = f(x \pm ct) \quad (1-1)$$

es apropiada para describir una perturbación que se propaga sin deformación en el eje x , en los sentidos positivo [$f(x - ct)$] y/o negativo [$f(x + ct)$]. Este tipo de movimiento se denomina movimiento ondulatorio. A las ondas que se propagan se les denomina también *ondas progresivas* en contraposición a las *ondas estacionarias* que se estudiarán más adelante.

1.3. La ecuación de ondas para las ondas planas en una dimensión

Ya sabemos la forma general que debe tener una onda que se propaga en una dimensión. Sin embargo, a la hora de saber como se propaga una perturbación y concretamente con qué velocidad, la expresión (1-1) anterior no es práctica ya que es difícil de obtener a partir de las características físicas del proceso. Afortunadamente es fácil obtener una relación que debe cumplir la solución (1-1), y que está más relacionada con las características físicas del proceso de propagación. Para ello utilizaremos la variable u definida como el argumento de χ , es decir $u = x + ct$ y derivaremos la ecuación anterior respecto del tiempo y de la posición a través de esta variable u , quedando

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial \chi}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}$$

y

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}$$

que igualando las segundas derivadas parciales de χ respecto de u da inmediatamente la expresión

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \quad (1-2)$$

conocida como ecuación de ondas o ecuación de D'Alembert, que debe cumplir toda onda plana que se propaga con velocidad c y sin deformación en una dimensión, y cuyas soluciones deben ser obviamente de la forma $\chi(x, t) = \chi(x \pm ct)$. Nótese que aunque hemos obtenido la ecuación de D'Alembert a partir de la función $\chi(x + ct)$ se obtendría el mismo resultado para la función $\chi(x - ct)$.

La ecuación de D'Alembert (1-2) es una ecuación lineal en χ , ya que ni χ ni sus derivadas aparecen más que como expresiones de primer grado. Así, se cumple el *principio de superposición* y cuando a un punto llega simultáneamente un conjunto de perturbaciones el resultado de dichas perturbaciones en dicho punto se puede obtener como la superposición de los resultados producidos por cada una de las perturbaciones individualmente, y por tanto la función que describe la perturbación completa como la suma de funciones que describen cada una de las perturbaciones individuales.

En la siguiente sección veremos la gran utilidad de esta expresión, obteniendo las velocidades de propagación de distintas perturbaciones en distintos medios.

1.3.1. Análisis de Fourier de una onda periódica.

Fourier demostró que las ondas periódicas de formas complejas pueden representarse como suma de una serie de ondas armónicas (ondas representadas por funciones seno o coseno). Consideremos una función $\chi(t)$ que represente la magnitud que tiene en una cierta posición una onda periódica de periodo T . Según el teorema de Fourier esta función puede representarse mediante una serie de la forma

$$\begin{aligned} \chi(t) = & a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \\ & + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \\ & + \dots + \\ & + a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \end{aligned} \quad (1-3)$$

donde $\omega = 2\pi/T$.

Dependiendo del perfil de la onda, el número de términos necesario para obtener una buena representación de la onda original será mayor o menor. Se denomina *frecuencia angular fundamental* o *armónico angular principal* a la frecuencia angular ω y a las frecuencias angulares $2\omega, 3\omega, \dots, n\omega$ armónicos angulares superiores o *sobretonos angulares*. Se denomina análisis de Fourier al proceso de determinación matemática de los coeficientes a_i y b_i .

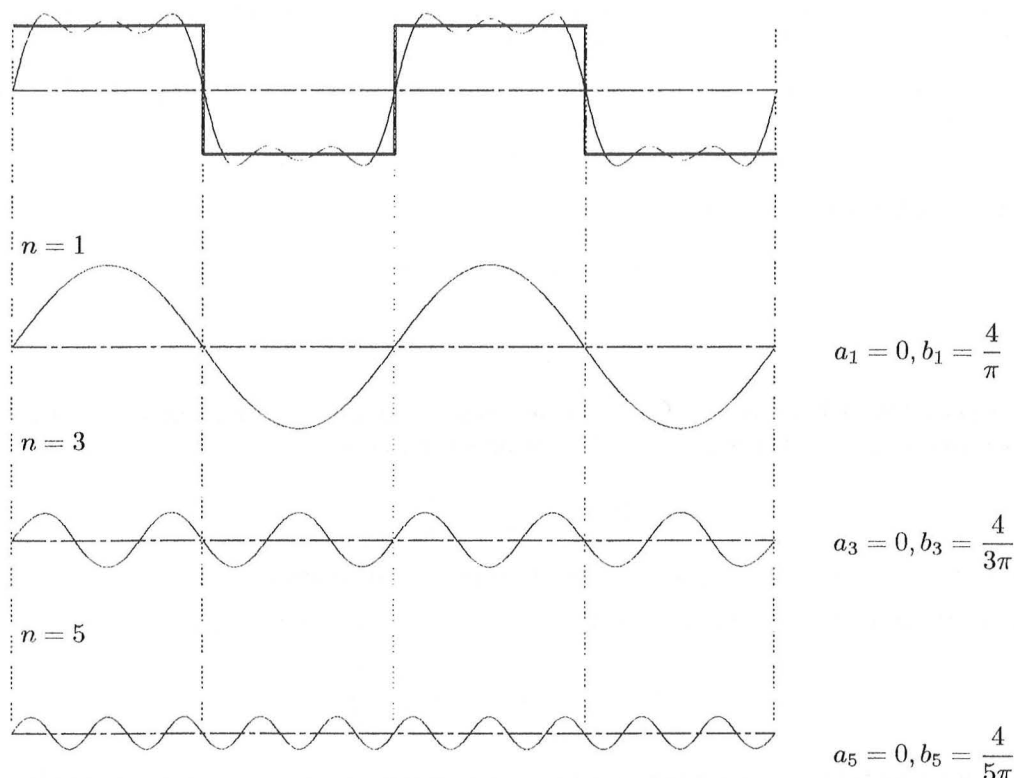


Figura 1-2 Análisis de Fourier de una onda cuadrada, conteniendo los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Fourier. Superpuesto a la onda cuadrada se muestra la suma de estos tres primeros términos del desarrollo.

Es decir cualquier movimiento periódico puede analizarse como una superposición de funciones armónicas. Por ejemplo, en la figura 1-2 se muestra el caso concreto de una onda cuadrada con los primeros términos no nulos de su descomposición de Fourier (Obsérvese que los términos pares deben ser nulos).

No es posible analizar un movimiento no periódico mediante una serie de Fourier. Sin embargo sí es posible hacerlo utilizando una integral de Fourier.

1.3.2. Propagación de una onda armónica plana

Como se acaba de ver al tratar el análisis de Fourier, un caso de especial importancia se tiene cuando la forma de la función (1-1) es armónica de la forma

$$\chi(x, t) = \chi_0 \sin k(x \pm ct) \quad (1-4)$$

donde k no es simplemente una constante que hace adimensional el argumento del seno, sino que tiene un significado especial. Consideremos la ecuación anterior, pero reemplazando x por $x + 2\pi/k$,

$$\chi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = \chi\left(x + \frac{2\pi}{k} \pm ct\right) = \chi_0 \sin k\left(x + \frac{2\pi}{k} \pm ct\right) = \chi_0 \sin[k(x \pm ct) + 2\pi] = \chi(x \pm ct)$$

Se ve claramente que

$$\lambda = 2\pi/k \quad (1-5)$$

es el periodo espacial de la onda dada por la función (1-4), es decir, la función se repite a sí misma cada longitud λ , denominándose a esta cantidad λ *longitud de onda*. $k = 2\pi/\lambda$ representa el número de longitudes de onda en la distancia 2π y recibe el nombre de *número de onda angular*, aunque dada su importancia en los fenómenos de propagación nos referiremos a él como *número de onda*.[†] Sus unidades son radianes de fase por unidad de longitud (o ciclos en cada 2π

[†]A veces, y especialmente en textos de espectroscopía, se denomina número de onda a la magnitud $\tilde{k} = 1/\lambda = k/2\pi$, también denominado *número de onda espectroscópico*, que corresponde al número de longitudes de onda por unidad de longitud (número de ciclos por unidad de longitud), y que tiene unidades de inversa de longitud. Éste es análogo, para oscilaciones en el espacio, a la frecuencia ν para las oscilaciones temporales.

unidades de longitud) y es análogo, para la periodicidad espacial, a la frecuencia angular ω en la periodicidad temporal, representando la tasa de cambio de la fase total con la distancia.

Así, podemos representar una onda plana sinusoidal que se propaga hacia la derecha a lo largo del eje x mediante una ecuación de la forma

$$\chi(x, t) = \chi_0 \sin k(x - ct) = \chi_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) \quad (1-6)$$

Esta ecuación puede también escribirse en la forma

$$\chi(x, t) = \chi_0 \sin(kx - \omega t) \quad (1-7)$$

donde

$$\omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (1-8)$$

es la frecuencia angular de la onda. Como la frecuencia angular está relacionada con la frecuencia ν con la que la situación física varía en un punto, a través de la expresión $\omega = 2\pi\nu$, se tiene la relación

$$\lambda\nu = c = \frac{2\pi}{k}\nu = \frac{\omega}{k} \quad (1-9)$$

entre la longitud de onda λ , la frecuencia ν y la velocidad de propagación de la onda c .

Podríamos haber escrito lo anterior en función del periodo $T_{per} = 2\pi/\omega = 1/\nu$ en la forma

$$\chi(x, t) = \chi_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T_{per}} \right) \quad (1-10)$$

Como se ve en las ecuaciones anteriores, para una onda armónica plana que se propaga se tiene una doble periodicidad, espacial y temporal. En un instante de tiempo dado, como si hubiéramos hecho una fotografía instantánea de la perturbación, hay una periodicidad espacial en la onda, ya que ésta se repite cada longitud de onda λ . Igualmente, en un punto fijo del espacio afectado por la perturbación al observar la evolución de la perturbación en ese punto se ve que hay una periodicidad temporal, ya que la onda se repite cada periodo.

1.4. Propagación de ondas transversales en una cuerda tensa.

1.4.1. Ecuación de onda y velocidad de propagación

Consideremos ahora una cuerda que se encuentra tensa bajo la acción de una fuerza tensora $\mathcal{F}$. En el equilibrio mecánico la cuerda se encuentra prácticamente recta (salvo una pequeña catenaria que no consideraremos). Si en un punto de la cuerda desplazamos ésta perpendicularmente, un segmento dx que se encuentra en un punto x se habrá desplazado en la dirección perpendicular una cantidad u , como se ve en la figura 1-3, manteniéndose la fuerza tensora $\mathcal{F}$ la misma en ambos extremos. Esta fuerza es debida a la tracción que realiza el resto de la cuerda a ambos lados del segmento, pero debido a la curvatura de la cuerda ambas fuerzas ya no se aplican en la misma dirección y sentidos opuestos. Las componentes verticales de cada una de las fuerzas son

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y &= -\mathcal{F} \sin \alpha \\ \mathcal{F}'_y &= \mathcal{F} \sin \alpha', \end{aligned}$$

por lo que la fuerza resultante sobre el segmento AB de la cuerda es

$$F_y = \mathcal{F}(\sin \alpha' - \sin \alpha)$$

Como la curvatura es en general pequeña es posible aproximar los senos por las tangentes correspondientes, quedando

$$F_y = \mathcal{F}(\tan \alpha' - \tan \alpha) \rightarrow dF_y = \mathcal{F}d \tan \alpha = \mathcal{F} \frac{\partial \tan \alpha}{\partial x} dx$$

$\tan \alpha$ es la pendiente de la curva formada por la cuerda en el punto x , y puede expresarse como $\partial u / \partial x$, quedando para la fuerza neta en la dirección y

$$dF_y = \mathcal{F} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \mathcal{F} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (1-11)$$

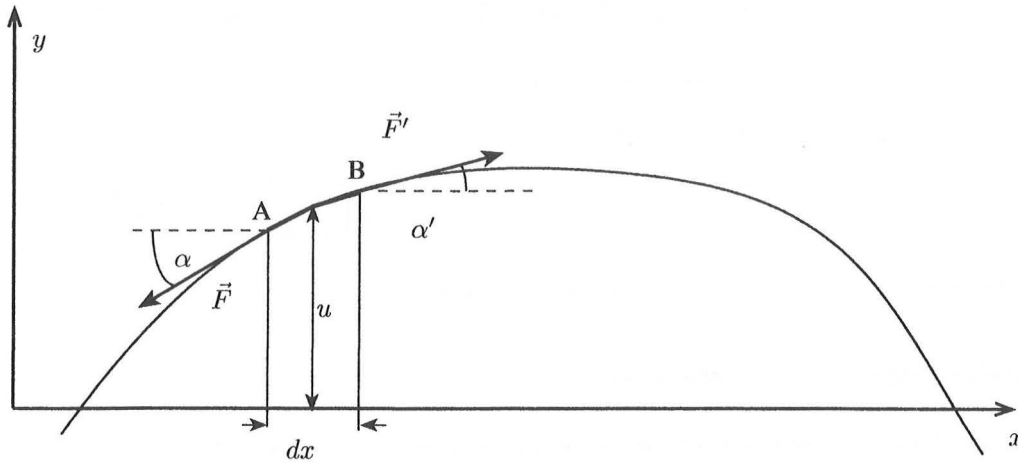


Figura 1-3 Sistema de fuerzas que actúa sobre un elemento de cuerda de longitud dx que se ha desplazado en la dirección perpendicular una distancia u .

Esta fuerza neta debe ser igual al producto de la masa del segmento de cuerda, $\rho_l dx$, por la componente de la aceleración del elemento de cuerda en la dirección y ,

$$dF_y = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho_l dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1-12)$$

donde ρ_l es la densidad lineal de masa de la cuerda. De las dos ecuaciones anteriores se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{F}{\rho_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1-13)$$

que tiene la forma de la ecuación de ondas, lo que quiere decir que una perturbación transversal en la cuerda se propaga longitudinalmente a lo largo de la misma con una velocidad

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} \quad (1-14)$$

La fuerza resultante paralela al eje x es

$$F_x = F \cos \alpha' - F \cos \alpha = F(\cos \alpha' - \cos \alpha)$$

que cuando el ángulo es muy pequeño es, con muy buena aproximación, nula. Nótese que en los cálculos anteriores se ha considerado únicamente el caso en el que la amplitud es pequeña.

1.4.2. Energía de una cuerda vibrante

Calculemos ahora la energía de una cuerda vibrante. La energía cinética de cada elemento de la cuerda de longitud original dx como el que vimos en la figura 1-3 vendrá dada por

$$dE_k = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho_l dx \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (1-15)$$

donde u es el desplazamiento de la cuerda y ρ_l su densidad lineal de masa. Por otra parte, dicho elemento de la cuerda es estirado hasta una longitud dx' dada por

$$dx' = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \approx dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$$

por lo que cambia su longitud en

$$dx' - dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

bajo la acción de la fuerza tensora $\mathcal{F}$. El trabajo realizado nos dará la energía potencial del elemento,

$$dE_p = \mathcal{F}(dx' - dx) = \frac{\mathcal{F}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (1-16)$$

La energía total por unidad de longitud de la cuerda será

$$\frac{dE_{tot}}{dx} = \frac{1}{2}\rho_l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\rho_l c^2}_{\mathcal{F}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2}\rho_l c^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (1-17)$$

y la energía total será la integral de esta expresión extendida a toda la cuerda.

Densidad lineal de energía para una onda armónica

Si por la cuerda se propaga una onda armónica de la forma $u = u_0 \cos(kx - \omega t)$ la expresión anterior da

$$\frac{dE_{tot}}{dx} = \rho_l c^2 u_0^2 k^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

y su promedio temporal nos da la densidad lineal de energía promedio

$$\mathcal{E}_{ti} = \frac{1}{2}\rho_l c^2 u_0^2 k^2 = \frac{1}{2}\rho_l \omega^2 u_0^2 \quad (1-18)$$

para una cuerda vibrante a través de la que se propaga una onda armónica.

Potencia transmitida por una onda armónica a través de la cuerda.

Consideremos el extremo izquierdo del elemento dx de la figura 1-3 como si fuera el extremo izquierdo de la cuerda, que se está desplazando con una velocidad $\dot{u}$ bajo la acción de la componente vertical de $\mathcal{F}$. La potencia transmitida a través de la cuerda desde ese extremo vendrá dada por

$$\frac{dW}{dt} = F_y \frac{du}{dt} = F_y \dot{u}$$

que en función de la fuerza tensora $\mathcal{F}$ queda

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{F} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{du}{dt} = -\mathcal{F} \frac{\partial u}{\partial x} \dot{u},$$

donde el signo $-$ aparece como consecuencia de que si la pendiente $\partial u / \partial x$ es positiva la fuerza recuperadora va hacia abajo, y de que en una cuerda tensa $\mathcal{F}$ es siempre positivo.

Si la onda que se propaga por la cuerda es armónica de la forma $u = u_0 \cos(kx - \omega t)$, ésto da

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{F} k \omega u_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = c \rho_l \omega^2 u_0^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

con $\mathcal{F} = \rho_l c^2$ y $k = \omega / c$. Promediando temporalmente esta expresión y haciendo uso de la ecuación (1-18) se obtiene la potencia promedio que se propaga a través de la cuerda con una onda armónica,

$$\left(\frac{dW}{dt} \right) = c \rho_l \omega^2 u_0^2 \frac{1}{2} = c \left\{ \frac{1}{2} \rho_l \omega^2 u_0^2 \right\} = c \mathcal{E}_{ti}. \quad (1-19)$$

1.5. Propagación de ondas transversales en una membrana tensa

Analizaremos ahora la propagación de ondas transversales en una membrana tensa, como la superficie de un tambor o el diafragma de un micrófono. En nuestro análisis supondremos que la membrana es delgada y uniforme y que tiene un comportamiento perfectamente elástico, con una rigidez muy baja y sin disipación de energía por rozamiento, siendo ρ_s la densidad superficial de masa de la membrana.

Nos restringiremos a desplazamientos pequeños y consideraremos que la fuerza tensora por unidad de longitud $\mathcal{F}_l$ es uniforme en la membrana e isótropa. Así, la fuerza ejercida a través de un segmento de longitud dl por el material de un lado sobre el del otro es $\mathcal{F}_l dl$.

1.5.1. La ecuación de onda para una membrana tensa

Utilizaremos coordenadas cartesianas para resolver el problema general. Nótese que el uso de un sistema de coordenadas adecuado en un problema particular puede simplificar enormemente el tratamiento del mismo. Si denominamos xy al plano de la membrana y z al eje en el que tienen lugar los desplazamientos (a los que denominaremos u), la fuerza recuperadora que actúa sobre un elemento de superficie infinitesimal $dS = dx dy$ será la suma de las componentes según z de las fuerzas recuperadoras en los lados paralelos a x e y . Mediante un razonamiento análogo al seguido para la cuerda tensa en la sección 1.4, la fuerza neta en la dirección z que actúa sobre el elemento de superficie dS debido a las fuerzas en la dirección y es

$$\mathcal{F}_l dy \frac{\partial \tan \alpha_y}{\partial x} dx = \mathcal{F}_l dy \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \mathcal{F}_l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy$$

mientras que la fuerza neta en la dirección z que actúa sobre el elemento de superficie dS debido a las fuerzas en la dirección x es

$$\mathcal{F}_l \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy.$$

La suma de ambas fuerzas debe ser igual al producto de la masa del elemento de superficie por su aceleración en la dirección z ,

$$\mathcal{F}_l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \rho_s dx dy \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1-20)$$

que nos da la ecuación de ondas para una membrana elástica tensa,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = \frac{\rho_s}{\mathcal{F}_l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1-21)$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{\mathcal{F}_l}{\rho_s}} \quad (1-22)$$

es la velocidad de propagación de las mismas. El primer miembro de la ecuación (1-21) es la laplaciana de u en coordenadas cartesianas planas, y en esa forma es muy útil para analizar membranas rectangulares. La ecuación de ondas así expresada es válida para cualquier sistema de referencia en el que los ejes están rotados respecto de los anteriores en el plano xy .

Si la membrana es circular como el parche de un tambor, es conveniente expresar la laplaciana en coordenadas polares planas (r, θ) , con $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, quedando la ecuación de ondas (1-21) de la membrana en la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1-23)$$

1.5.2. Solución de ondas planas en coordenadas cartesianas

Buscaremos ahora una solución de la ecuación (1-21). Para ello supondremos que la solución general puede expresarse, utilizando el método de separación de variables, en la forma

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (1-24)$$

donde $X(x)$ es función exclusivamente de x , $Y(y)$ es función exclusivamente de y y $T(t)$ es función exclusivamente de t . Sustituyendo en la ecuación (1-21), se tiene

$$Y(y)T(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)T(t) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = X(x)Y(y) \frac{1}{c^2} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

que, dividiendo por $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ queda

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k^2 \quad (1-25)$$

donde, al ser los dos miembros de la ecuación función de distintas variables independientes, y al deber mantenerse la igualdad para cualquier valor de dichas variables, ambos deben iguales a una constante a la que denominaremos $-k^2$. Así tendremos por una parte la ecuación diferencial de la dependencia temporal,

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + (kc)^2 T(t) = \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (1-26)$$

con $\omega = kc$, que es una ecuación similar en forma a la del oscilador libre que se ve en la sección 2.2.1 de la referencia [4] y cuya solución es

$$T(t) = A_t e^{i(\omega t - \alpha_t)} \quad (1-27)$$

y por otra parte la ecuación diferencial de la dependencia espacial,

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -k^2 \quad (1-28)$$

Cada uno de los términos del primer miembro de la ecuación depende de una única variable independiente y su suma debe ser constante. Como ésto debe ser así para cualquier valor de las variables x e y , ambos deben ser constantes, por lo que si denominamos $-k_x^2$ y $-k_y^2$ a las constantes, se tiene que las correspondientes ecuaciones diferenciales separadas, junto con sus soluciones, son

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = A_x e^{i(k_x x - \alpha_x)} \quad (1-29)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0 \Rightarrow Y(y) = A_y e^{i(k_y y - \alpha_y)} \quad (1-30)$$

ya que cada una de las ecuaciones diferenciales es de nuevo de la forma de la ecuación diferencial del oscilador libre. Asimismo se cumple

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1-31)$$

La solución completa para el desplazamiento en la dirección z queda entonces

$$u(x, y, t) = A e^{i(k_x x + k_y y - \omega t - \alpha)} = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \alpha)} \quad (1-32)$$

con $\vec{r} = (x, y)$ y $\vec{k} = (k_x, k_y)$, donde hemos puesto los signos así por comodidad, ya que la misma ecuación con $\pm k_x$, $\pm k_y$ y $\pm \omega$ es también solución de la ecuación (1-21). Esta solución corresponderá a una onda que se propaga sin deformación con velocidad $c = \omega/k$ en la dirección dada por $\vec{k}$.

Analicemos un poco más la solución obtenida. Para ello observemos el frente de onda, lugar geométrico de los puntos en los que la perturbación tiene el mismo valor, es decir en los que la fase total es constante e igual a $k_x x + k_y y - \omega t - \alpha$. Como α es constante, $k_x x + k_y y - \omega t$ también será constante en el frente de onda e igual a un cierto valor al que denominaremos ϕ , que será característico de cada frente de onda. En un instante genérico t los puntos del frente de onda satisfarán la ecuación

$$k_x x + k_y y - \omega t = \phi, \quad (1-33)$$

es decir, en cada instante el frente de onda es una línea recta en el plano xy de la membrana, dada por $y = (\phi + \omega t)/k_y - k_x x/k_y$, que es perpendicular a $\vec{k}$. Así, la ecuación (1-32) representa una onda plana bidimensional que se propaga en la membrana en la dirección $\vec{k}$.

Si en un mismo instante consideramos el frente de onda anterior y el siguiente, correspondiente a un aumento de 2π en la fase, se tendrá, con $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$,

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{r}_1 &= \phi + \omega t \\ \vec{k} \cdot \vec{r}_2 &= \phi + \omega t + 2\pi \end{aligned} \Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 2\pi = \lambda k \quad (1-34)$$

donde λ es la *longitud de onda*, que se obtiene de la diferencia de las proyecciones de $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ sobre la dirección de propagación y que muestra la distancia entre dos frentes de onda consecutivos y $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \omega/c$ es el *número de onda* de la onda plana, mientras que a $\vec{k}$ se le denomina *vector de onda*.

1.5.3. Solución en coordenadas polares planas

Si resolvemos el problema anterior en coordenadas polares planas con la ecuación de ondas (1-23) y utilizamos el método de separación de variables probando con una solución del tipo

$$u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t) \quad (1-35)$$

obtenemos para la parte temporal una dependencia similar a la que obteníamos en coordenadas cartesianas,

$$T(t) = A_t e^{i(\omega t - \alpha_t)} \quad (1-36)$$

quedándonos el resto como la denominada *ecuación de Helmholtz* en coordenadas polares

$$\frac{r^2}{R(r)} \left(\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} \right) + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} \quad (1-37)$$

donde $k = \omega/c$. El primer miembro de la ecuación es una función únicamente de r mientras que el segundo miembro es una función únicamente de θ y ésto debe ser así para cualquier valor de r y θ . Ésto solo es posible si ambos miembros son constantes. Si denominamos m^2 a esta constante el segundo miembro queda como

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + m^2 \Theta(\theta) = 0 \quad (1-38)$$

que tiene una solución armónica de la forma

$$\Theta(\theta) = A_\theta \cos(m\theta - \gamma_\theta). \quad (1-39)$$

Para valores de r y t dados, esta función debe repetirse cada 2π radianes. Para que ello sea posible, m no puede tener valores cualesquiera, sino únicamente valores enteros positivos o 0, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ de forma que se cumpla siempre que $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$. Con estos valores posibles de m se obtiene, a partir del primer miembro, la *ecuación de Bessel*

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0 \quad (1-40)$$

Como es una ecuación de segundo orden debe tener dos soluciones linealmente independientes para cada valor del parámetro m . Estas soluciones son dos funciones especiales llamadas *funciones de Bessel de primera especie* $J_m(kr)$ y *funciones de Bessel de segunda especie* $Y_m(kr)$ ambas de orden m .

Las funciones de Bessel de segunda especie también son denominadas *funciones de Neumann* y se hacen infinitas para $kr = 0$ aunque tienen valores finitos en otro caso. Por ese motivo no pueden representar un posible desplazamiento de una membrana circular completa, que es el caso más habitual en el que se usan coordenadas polares, por lo que en muchos casos bastará con utilizar las funciones de Bessel de primera especie. Sin embargo, puede ser necesario utilizarlas en otro tipo de problemas, como en el caso de una membrana anular (para la que obviamente no hay problemas en su centro). Todas las funciones de Bessel de primera especie se hacen 0 en el origen salvo J_0 que se hace 1 y oscilan con amplitudes que disminuyen según aumenta kr de una forma que recuerda a la de un oscilador amortiguado. Las funciones de Bessel están tabuladas en los manuales habituales de fórmulas matemáticas y definidas en muchos programas de cálculo matemático, aunque con frecuencia solo las dos primeras de cada tipo. Ésto es debido a que son recurrentes y basta con conocer dos sucesivas para conocer todas las demás utilizando la fórmula de recurrencia

$$J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) - J_{m-1}(x)$$

1.6. Propagación de ondas mecánicas en sólidos.

En los sólidos se tienen fuerzas recuperadoras elásticas frente a deformaciones tanto longitudinales (de tracción y compresión) como transversales (cortantes). Esto hace que en un sólido puedan aparecer tanto ondas longitudinales como transversales. Dentro de éstas últimas se encuentran las ondas de torsión, producidas por fuerzas recuperadoras de torsión.

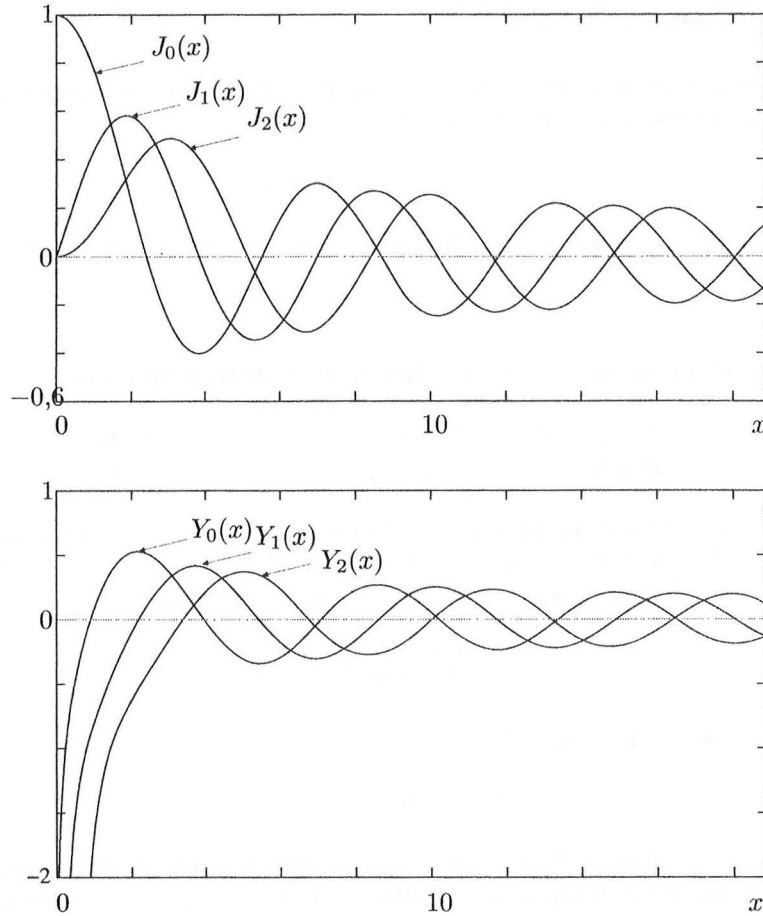


Figura 1-4 Representación gráfica de las tres primeras funciones de Bessel de primera especie (arriba) y de segunda especie (abajo)

1.6.1. Propagación de una onda mecánica en un sólido elástico isótropo e ilimitado.

Para obtener las características de la propagación de una onda en un sólido elástico isótropo e ilimitado es necesario partir de la ecuación de movimiento de un elemento de volumen infinitesimal del sólido, en la que se tienen en cuenta las acciones de las fuerzas elásticas a través de las superficies del elemento,

$$\begin{aligned}\frac{dF_x}{dV} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho g_x = \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ \frac{dF_y}{dV} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho g_y = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{dF_z}{dV} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\end{aligned}$$

donde $\vec{g} = (g_x, g_y, g_z)$ representa la fuerza por unidad de masa debida a la acción de fuerzas de masa como la gravitatoria y las otras componentes representan la acción de fuerzas elásticas. La expresión anterior puede escribirse de una forma más compacta en la forma siguiente, en la que además hemos despreciado el efecto de la fuerza gravitatoria,

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} \quad (1-41)$$

donde $\hat{\sigma}$ es el tensor de tensiones y $\vec{u}$ el vector de desplazamientos, siendo $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}$, con $\vec{r}_0$ la posición del elemento en el equilibrio.

Consideremos la deformación del elemento prismático infinitesimal de dimensiones dx , dy y dz a lo largo de los ejes coordenados. Como consecuencia de la perturbación estas dimensiones pasan a ser $dx + du_x$, $dy + du_y$ y $dz + du_z$, donde

u_x , u_y y u_z son los desplazamientos en cada una de las direcciones de los ejes coordenados y, al estar las aristas dirigidas originalmente según los ejes,

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx, \quad du_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} dy, \quad du_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} dz$$

por lo que la *deformación cúbica* o *deformación unitaria de volumen* queda

$$\theta = \frac{dV}{V} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (1-42)$$

es decir, θ es igual a la divergencia del vector desplazamiento en ese punto.

Las relaciones entre tensiones y deformaciones vienen dadas por la conocida ley de Hooke

$$\hat{\sigma} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \mathbb{I} + \frac{E}{(1+\nu)} \hat{\epsilon} = \lambda_l \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \mathbb{I} + 2G \hat{\epsilon} = \lambda_l \theta \mathbb{I} + 2G \hat{\epsilon} \quad (1-43)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson, E el módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young y $\hat{\epsilon}$ el tensor de deformaciones

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (1-44)$$

mientras que λ_l y G son las constantes de Lamé,

$$\lambda_l = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1-45a)$$

y

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1-45b)$$

denominándose a G *módulo de rigidez*. Combinando las ecuaciones (1-41) y (1-43) se obtiene

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \frac{E}{(1+\nu)} \nabla^2 \vec{u} = \lambda_l \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + 2G \nabla^2 \vec{u} \quad (1-46)$$

Si las deformaciones producidas por la onda son pequeñas, las fuerzas recuperadoras que intervienen pueden considerarse elásticas. En esta expresión hemos utilizado la notación

$$\vec{\nabla} \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla^2 u_x \\ \nabla^2 u_y \\ \nabla^2 u_z \end{pmatrix} = \nabla^2 \vec{u} \quad (1-47)$$

Estudiaremos en primer lugar una onda plana que se propaga en un sólido isótropo ilimitado[†], es decir una onda en la que los desplazamientos $\vec{u}$ son función únicamente de una de las coordenadas, por ejemplo x , y del tiempo. Así todas las derivadas parciales respecto de y y z desaparecen y la ecuación anterior se puede, para los distintos ejes, descomponer en las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = c_l^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (1-48a)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = c_t^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (1-48b)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = c_t^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}. \quad (1-48c)$$

[†] esto es importante, porque en estas condiciones apenas hay deformación transversal para una longitudinal dada

Las ecuaciones (1-48) tienen la forma de la ecuación de onda para ondas planas (1-2) que se propagan sin deformación en la dirección x con velocidades c_l o c_t . La primera de las ecuaciones correspondería a una onda longitudinal (produce un desplazamiento a lo largo de la dirección de propagación x) que se propaga con velocidad

$$c_l = \sqrt{\frac{E\nu}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (1-49)$$

donde G es el módulo de rigidez (1-45b) y ρ la densidad del medio. Las otras dos ecuaciones corresponderían a ondas transversales (producen desplazamientos en las direcciones y o z perpendiculares a la dirección de propagación) que se propagan con velocidad

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (1-50)$$

De esta forma vemos que una onda elástica general que se propaga en un sólido isótropo ilimitado en realidad consta de dos ondas que se propagan independientemente una de otra, una de ellas longitudinal (con velocidad c_l) y otra transversal (con velocidad c_t). La velocidad de propagación es distinta según la perturbación causada por la onda sea longitudinal o transversal. En los sólidos isótropos, la velocidad de las ondas longitudinales es mayor que la velocidad de las ondas transversales (ya que, normalmente, $0 < \nu < 1/2$), siendo la relación entre ambas

$$\frac{c_l}{c_t} = \sqrt{\frac{2(1+\nu)(1-\nu)}{1-\nu(1+2\nu)}} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}. \quad (1-51)$$

Un sismólogo puede estimar la distancia al epicentro de un temblor midiendo la diferencia en los tiempos de las ondas longitudinales y transversales.

En los sólidos anisótropos, las propiedades elásticas no son las mismas en todas las direcciones. Por tanto, la velocidad de las ondas longitudinales y transversales depende de la dirección de propagación y en el caso de las ondas transversales, también de su polarización, esto es, de la orientación del plano formado por la dirección de propagación y la de variación de la perturbación, al que se conoce como plano de oscilación.

1.6.2. Propagación de ondas elásticas longitudinales planas en una barra fina.

Las ondas que se propagan en una lámina delgada o en una barra fina son a menudo distintas de las que se propagan en un sólido ilimitado. Esto es así cuando la longitud de onda de las ondas es grande comparado con el espesor de la lámina o el diámetro de la barra. En el caso contrario, en el que las longitudes de onda son pequeñas frente al espesor del elemento, el medio puede considerarse en la práctica como ilimitado en todas las direcciones y las relaciones (1-48) siguen siendo válidas.

En el caso de una barra fina, la deformación que se produce en la dirección longitudinal no depende de ninguna fuerza de tracción o compresión transversal y por lo tanto se trata en la práctica de una tracción o compresión simple, donde la ley de Hooke es válida en su forma más sencilla, $\sigma = E\epsilon$. Si no se tratara de una barra fina, aparecerían también fuerzas recuperadoras elásticas de tracción o compresión en las direcciones perpendiculares a la de propagación y deberemos utilizar las ecuaciones de la sección anterior. El caso de la lámina delgada es un caso intermedio entre ambos.

Obtención de la ecuación de ondas

Consideremos una barra (fina) y perturbemos uno de sus extremos, por ejemplo golpeándola. Esta perturbación se propaga a lo largo de la barra y finalmente se siente al otro extremo. La onda elástica producida por la perturbación se ha propagado a lo largo de la barra. Estudiemos esta propagación. Para ello consideraremos una barra de sección transversal uniforme, sometida en caras opuestas de cada una de sus secciones a una fuerza $F(x)$ que en general será distinta a lo largo de la barra.

Consideremos ahora las fuerzas que actúan sobre una rodaja de un cierto espesor. En una rodaja como la que se muestra en la figura la magnitud de la fuerza a un lado y a otro tendrá en general distinto valor al ser $F(x)$ distinta a lo largo de la barra. Sin embargo, si consideramos la fuerza que se ejerce por la rodaja sobre el resto del material en una de las bases de la misma y la que ejerce el resto del material sobre la rodaja a través de la misma cara, por el principio de

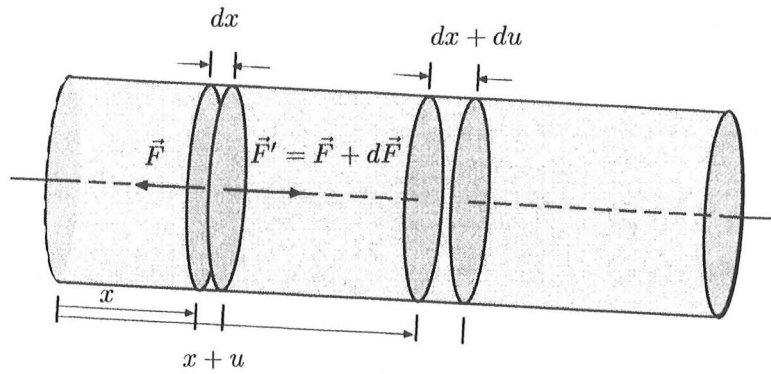


Figura 1-5 Propagación de una perturbación a lo largo de una barra fina. Una rodaja de espesor dx situada en x se desplaza a $x' = u + x$ durante el paso de la onda y su espesor pasa a ser $dx' = dx + du$. A través de cada una de sus caras actúan unas fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}'$.

acción y reacción ambas tendrán la misma magnitud, pero distintos sentidos. Para describir como es la fuerza de tracción o compresión que actúa en la barra en una determinada sección utilizaremos este conjunto de fuerzas a través de una sección al que denominaremos $\mathcal{F}$. El valor de $\mathcal{F}$ en esa sección será $|F(x)|$ a través de la sección y su signo positivo si produce una tracción y negativo si produce una compresión, y en el caso general variará de un punto a otro de la barra.

Bajo la acción de estas fuerzas, una sección genérica de la barra que originalmente se encuentra en una posición x sufre un desplazamiento u paralelo al eje, pasando a la posición $x + u$. Si este desplazamiento es el mismo en todos los puntos de la barra no se produce deformación alguna, sino un desplazamiento de toda la barra como un sólido rígido. Consideremos ahora el caso en el que se produce deformación. Para ello estudiaremos qué ocurre con la rodaja de espesor dx que originalmente está en x . Ya hemos visto que la cara izquierda se desplaza a $x + u$. La cara de la derecha se desplazará en $u' = u + du$, pasando su espesor de dx a $dx' = dx + du$. El alargamiento (o acortamiento si du es negativo) de la rodaja ha sido por tanto du .

Utilizaremos la deformación unitaria (deformación por unidad de longitud) en la dirección x , definida por

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1-52)$$

y la tensión elástica, definida por

$$\sigma = \frac{\mathcal{F}}{A}, \quad (1-53)$$

sabiendo que en un estado de tensiones unidimensional y pequeñas deformaciones, ambas están relacionadas por la ley de Hooke correspondiente a una tracción o compresión simple

$$\sigma = E\epsilon \quad (1-54)$$

donde E es el módulo de Young. En función de la tensión elástica σ las fuerzas a través de las dos caras de la rodaja son $\vec{F} = -\sigma A \vec{u}_x$ y $\vec{F}' = \sigma' A \vec{u}_x$.

Cuando se está propagando una perturbación, la tensión elástica $\sigma(x)$ sobre cada sección no es la misma por lo que una rodaja de espesor dx estará sometida a una fuerza neta

$$F' - F = dF = A \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} dx$$

hacia la derecha, donde se ha tomado como positivo el sentido del sistema de fuerzas que da una tracción sobre la rodaja. Como la masa de la rodaja es $dm = \rho A dx$ y su aceleración $\partial^2 u / \partial t^2$ la ecuación de movimiento de la rodaja es

$$dF = a dm \quad \Rightarrow \quad A \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1-55)$$

A partir de la ley de Hooke (1-54) podemos escribir

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1-56)$$

y derivando respecto de x se tiene

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que sustituyendo en la ecuación anterior (1-55) nos da

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1-57)$$

ecuación similar a la ecuación de onda, que nos indica que el campo de desplazamientos u se propaga a lo largo de la barra con una velocidad

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1-58)$$

El campo de tensiones elásticas σ satisface una ecuación similar,

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \quad (1-59)$$

así como el campo $\mathcal{F}$,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} \quad (1-60)$$

Propagación de la energía

Si consideramos los distintos casos de propagación de ondas mecánicas vemos que en todos ellos se tiene un movimiento de partículas alrededor de una posición de equilibrio. Estas partículas del medio en el que se propaga la perturbación no tienen un movimiento promedio fuera de su posición de equilibrio. Como ya hemos dicho anteriormente, no se propaga la materia en sí, sino su estado de movimiento, lo que implica que lo que se está propagando con la onda es cantidad de movimiento y energía.

Ya estudiamos anteriormente el caso de una cuerda tensa (1-19). Consideremos ahora el caso de las ondas elásticas longitudinales que se propagan a través de una barra. En un corte arbitrario de la barra, la fuerza que ejerce el lado izquierdo sobre el derecho es $-\sigma A$, hacia la izquierda si se tiene una tracción (con σ positivo), produciendo un desplazamiento du y realizándose un trabajo $-\sigma A du$. Para que las ondas mecánicas comiencen a propagarse por la barra y que esta propagación se mantenga es necesario comunicar de forma permanente a un extremo de la barra una potencia. Ésta es la potencia que se empleará en producir y difundir las ondas a lo largo de la barra. Para ello en nuestro ejemplo se comunicará una energía al lado izquierdo de la barra, que se propagará a lo largo de la misma. La potencia o trabajo por unidad de tiempo que el lado izquierdo transmite hacia el derecho será de la forma

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\sigma A \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1-61)$$

Cuando la perturbación pasa de una sección a otra, se transmite esa potencia. Para que se produzca propagación de izquierda a derecha debe suministrarse energía al extremo izquierdo de la barra. Esta perturbación puede ser aislada, con un pulso de extensión limitada producido por un suministro de energía en un instante dado, o continua, para lo cual se necesita un suministro continuo de energía.

Energía que se propaga con una onda armónica

Un caso particular muy interesante lo constituye una perturbación armónica, que da lugar a una onda armónica de la forma $u = u_0 \sin(kx - \omega t)$. Sustituyendo en la ecuación (1-61) y derivando se tiene

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\sigma A \{-\omega u_0 \cos(kx - \omega t)\}.$$

Asimismo, de la ecuación (1-56) se tiene

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} = E k u_0 \cos(kx - \omega t)$$

que junto a las relaciones $\omega = kc$ y $c = \sqrt{E/\rho}$ nos da

$$\frac{\partial W}{\partial t} = cA \{ \rho \omega^2 u_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \} \quad (1-62)$$

que es una expresión variable, pero siempre positiva. Observemos que esta expresión es de la forma genérica $f(kx - \omega t)$, por lo que satisface la ecuación de ondas. Esta onda corresponde a una onda de energía que se propaga con la perturbación. Normalmente no nos interesará la potencia instantánea que se transmite, sino la potencia media en un intervalo de tiempo, dada por

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = cA \{ \rho \omega^2 u_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \}.$$

Ahora bien, el valor promedio de $\cos^2$ en un periodo es $1/2$, por lo que la expresión anterior queda como

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = cA \left\{ \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2 \right\}. \quad (1-63)$$

La energía en el medio en el que se propaga la onda mecánica será en parte energía potencial de deformación del medio (p.ej., compresión) y en parte energía cinética asociada al movimiento de las partículas del medio. En un cierto elemento de volumen, las proporciones de una y otra variarán, pero la energía total permanecerá constante si no hay disipación de energía.

Observemos que la ecuación (2-7) de la referencia [4] nos da la energía total de un oscilador libre como $E_t = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$. Particularizando a nuestro caso con una amplitud u_0 , una frecuencia angular ω y tomando energías por unidad de volumen (con lo que en vez de la masa m tendremos la densidad ρ), se tiene

$$\mathcal{E}_t = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2 \quad (1-64)$$

para la energía por unidad de volumen o densidad de energía en la barra a causa de las oscilaciones del movimiento ondulatorio. Si sustituimos esta ecuación en la (1-63) se tiene

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = cA \mathcal{E}_t. \quad (1-65)$$

Como c es la velocidad de propagación, $c\mathcal{E}_t$ es el flujo promedio de energía por unidad de área y de tiempo, mientras que al multiplicar por la sección A se tiene la energía promedio que fluye por unidad de tiempo a través de una sección transversal de la barra como consecuencia del movimiento ondulatorio.

Se define la intensidad de la onda como el flujo promedio de energía por unidad de área y de tiempo

$$I = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = c\mathcal{E}_t \quad (1-66)$$

Se obtienen resultados similares en un fluido para las ondas planas de presión y para las ondas esféricas lejos de la fuente, como se verá más adelante.

1.7. Propagación de ondas mecánicas en fluidos.

Las ondas de presión que se propagan en un fluido compresible reflejan variaciones de presión y densidad producidas por el movimiento de las moléculas en la dirección longitudinal en torno a su posición de equilibrio, como se verá en la figura 1-6. En este desplazamiento no se produce un transporte neto de materia, aunque se transportará energía y cantidad de movimiento al igual que en una barra fina.

Las diferencia de presiones entre distintos puntos actuará como fuerza restauradora sobre las moléculas del fluido. Como los fluidos no tienen resistencia elástica (fuerza recuperadora) a los cortantes, aunque sí tengan resistencia viscosa, en un fluido pueden propagarse únicamente ondas longitudinales en las que el movimiento del medio tiene lugar en la dirección de propagación.

1.7.1. La ecuación de ondas para un fluido no viscoso

Cuando estudiamos la propagación de ondas de presión en un fluido hay que tener en cuenta que el fluido sin perturbar ya estará sometido a una cierta presión p_0 en el equilibrio. Así, la presión total en un punto del fluido será la suma de la presión en el equilibrio y el cambio de presión $\wp$ producido por la perturbación,

$$p = p_0 + \wp \quad (1-67)$$

La deducción de la ecuación de ondas para fluidos que vamos a presentar está basada en la bien conocida ecuación de continuidad para fluidos,

$$\vec{\nabla} p + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1-68)$$

y en la ley de Hooke para la compresión hidrostática,

$$-\wp = \mathcal{K}\theta \quad (1-69)$$

donde θ es la deformación unitaria de volumen $\delta V/V$ y $\mathcal{K}$ el módulo de compresibilidad. A menudo se escribe la ley de Hooke anterior para la compresión hidrostática (1-69) en función de la *condensación*

$$\sigma = \frac{\delta \rho}{\rho_0} = -\frac{\delta V}{V} \quad (1-70)$$

en la forma

$$\wp = \mathcal{K}\sigma \quad (1-71)$$

Si consideramos la deformación de un elemento prismático infinitesimal de fluido con dimensiones dx , dy y dz a lo largo de los ejes coordenados, como consecuencia de la perturbación estas dimensiones pasarán a ser $dx + du_x$, $dy + du_y$ y $dz + du_z$, en función de las componentes del vector de desplazamientos al igual que vimos en el caso de las ondas en sólidos en la sección 1.6.1. Del mismo modo, la deformación unitaria de volumen queda

$$\theta = \frac{dV}{V} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \vec{u} \quad (1-42)$$

igual a la divergencia del vector desplazamiento en ese punto. Salvo en lo que respecta a la perturbación que se está propagando por el mismo, el fluido está en reposo, con p_0 uniforme, por lo que $\vec{\nabla} p = \vec{\nabla} \wp$. Asimismo consideraremos que el término predominante en la densidad es la densidad en el equilibrio y que la perturbación no produce una excesiva variación en la densidad, por lo que podemos considerarla aproximadamente constante en la derivada temporal que aparece en la ecuación de continuidad (1-68). Así, ésta queda

$$\vec{\nabla} \wp + \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wp + \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0. \quad (1-72)$$

Aplicando el operador nabla a ambos lados de la ecuación de continuidad se obtiene

$$\nabla^2 \wp + \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\nabla} \vec{u} = \nabla^2 \wp + \rho_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

Sustituyendo θ por el valor dado por la ley de Hooke (1-69) se tiene

$$\nabla^2 \wp = \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ -\frac{\wp}{\mathcal{K}} \right\}$$

que da la ecuación de ondas para un fluido,

$$\frac{\partial^2 \wp}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{K}}{\rho_0} \nabla^2 \wp = c^2 \nabla^2 \wp \quad (1-73)$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{\mathcal{K}}{\rho_0}} \quad (1-74)$$

es la velocidad de propagación de las ondas en el fluido.

1.7.2. Energía de un fluido sometido a una onda de presión

Estudiemos ahora el cambio en la energía de un elemento de un fluido por el que pasa una onda de presión. Dicho elemento, que se encuentra en $\vec{r}$ y tiene un volumen dV sufrirá en cada instante un desplazamiento $\vec{u}$ al paso de la onda. La energía cinética de este elemento vendrá dada por

$$dE_k = \frac{1}{2} dm \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho_0 dV_0 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \quad (1-75)$$

donde u es el módulo de $\vec{u}$. Por otra parte, partiendo de la definición de *módulo y coeficiente de compresibilidad* para un cierto proceso, se tiene

$$\frac{1}{\mathcal{K}} = \kappa = -\frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial p} \quad \Rightarrow \quad dV = -\frac{V_0}{\mathcal{K}} d\wp$$

para ese proceso[†]. Así, la energía potencial del elemento de volumen infinitesimal sería el trabajo realizado por $\wp : 0 \rightarrow \wp$ y queda como

$$dE_p = -\int \wp dV = \frac{dV_0}{\mathcal{K}} \int_0^\wp \wp d\wp = \frac{\wp^2}{2\mathcal{K}} dV_0 = \frac{\wp^2}{2\rho_0 c^2} dV_0 \quad (1-76)$$

ya que $\mathcal{K} = \rho_0 c^2$ de acuerdo con (1-74). La energía total instantánea por unidad de volumen del fluido será

$$\frac{dE_{tot}}{dV_0} = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{\wp^2}{2\rho_0 c^2}. \quad (1-77)$$

En esta expresión $\dot{u}$ y $\wp$ son funciones de $\vec{r}$ y t y por tanto la densidad de energía por unidad de volumen también lo será. Aunque esta expresión es válida para cualquier onda de presión en el fluido, para cada caso concreto debe conocerse la forma de $\dot{u}$ y $\wp$. Más adelante veremos cómo es esta relación para los casos particulares de ondas planas y esféricas de presión sin disipación de energía.

1.7.3. Velocidad del sonido en los fluidos

Gases

Examinemos las consecuencias de la ecuación (1-74) para la velocidad de las ondas de presión en una columna de gas. En esta sección veremos como se puede relacionar esta presión con otras propiedades de los gases. La ecuación de estado de un gas real, a bajas presiones o altas temperaturas, y en general lejos de las zonas en las que se produce licuefacción puede expresarse en una buena aproximación mediante la ecuación de estado de los gases ideales. En función de ésta, la densidad se puede escribir como

$$pV = nRT = \frac{m}{\bar{M}} RT \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho(p, T) = \frac{m}{V} = \frac{\bar{M}p}{RT}$$

en función de la masa molecular $\bar{M}$, de la constante de los gases R , de la presión p y de la temperatura T . La temperatura del gas tenderá a subir en aquellas zonas que se comprimen al paso de la onda y a bajar en aquellas que se expanden. Dependiendo del posible intercambio de calor entre las zonas calientes y frías se tienen dos posibles aproximaciones.

Aproximación isoterma o de Newton. Esta aproximación fue propuesta por Newton en 1686 en base a consideraciones teóricas antes incluso de que se hiciera una distinción clara entre los procesos adiabáticos e isotermos. Si el proceso de propagación de la onda fuera muy lento, la temperatura en las zonas perturbadas por el movimiento ondulatorio se mantendría básicamente constante, al tener el sistema perturbado tiempo suficiente para alcanzar el equilibrio térmico con su entorno. En este caso se tendría un proceso isoterma, dado por la ecuación $pV = cte$ y el módulo de compresibilidad sería

$$p = cte V^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K} = p,$$

propagándose la perturbación con una velocidad

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad (1-78)$$

[†] $\mathcal{K}$ y κ deben calcularse para el proceso adecuado. Aceptando la aproximación de Laplace del apartado 1.7.3 esto sería para un proceso adiabático.

quedando la dependencia con la temperatura en la forma

$$c = \sqrt{\frac{R}{M}} \sqrt{T}$$

En la práctica esta aproximación da valores de la velocidad del sonido en el aire considerablemente menores que los valores experimentales.

Aproximación adiabática o de Laplace. Fue Laplace quien en 1816 señaló que este proceso debe ser considerado adiabático. Aunque en realidad hay un pequeño flujo de calor, como éste da lugar a una atenuación de la onda y el hecho cierto es que el sonido puede viajar grandes distancias con una pequeña atenuación (aparte de la debida al factor $1/r^2$), la magnitud del flujo térmico debe ser muy pequeña y por tanto la aproximación adiabática se presenta como una buena aproximación.

Veamos las cosas de otra forma, el movimiento ondulatorio asociado a la propagación del sonido en los gases da lugar a perturbaciones locales que son lo suficientemente rápidas para que el intercambio de calor que tiene lugar pueda considerarse nulo, es decir, que el proceso es básicamente adiabático. Ésto será así mientras que la longitud de onda sea grande comparada con el recorrido libre medio de las partículas del aire. La absorción debiera aumentar para longitudes de onda más próximas al recorrido libre medio, pero en la práctica las longitudes de onda del sonido son mucho mayores que el recorrido libre medio (en factores grandes, de cerca de un millón). Asimismo, aunque el proceso es rápido y por tanto irreversible se considera en una primera aproximación como reversible con una ecuación de la adiabática $pV^\gamma = cte$, con γ el índice adiabático, de forma que el módulo de compresibilidad $\mathcal{K}$ vendría dado por

$$p = cteV^{-\gamma} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K} = -V \frac{\partial p}{\partial V} = p\gamma$$

y la velocidad del sonido en un gas sería

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (1-79)$$

Esto nos permite escribir en la siguiente forma la velocidad de la perturbación en un gas, considerado el proceso adiabático,

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R}{M}} \sqrt{T} \quad (1-80)$$

que es mucho más próxima a los valores experimentales. En las tablas 1-1 y 1-2 se presentan distintos valores de la velocidad del sonido y de otros parámetros físicos en algunas sustancias.

En realidad siempre hay un pequeño intercambio de calor, relacionado con una disipación de energía de la onda y por tanto con una atenuación de la misma. Como en la práctica el sonido puede viajar grandes distancias con una pequeña atenuación, el flujo de calor debe ser pequeño y por tanto la aproximación adiabática es esencialmente correcta.

Salvo en el límite de bajas presiones y/o altas temperaturas los gases reales siguen ecuaciones de estado más complejas que la ecuación de estado del gas perfecto. Esto hace que el índice adiabático γ sea en general función de presión y temperatura y que las expresiones anteriores sean más complejas.

Líquidos

La velocidad del sonido en los líquidos depende del módulo de compresibilidad y de la densidad al igual que en los gases. Sin embargo no es posible hacer un tratamiento simplificado como el que se ha hecho en los gases. En su lugar se utilizan diversas relaciones empíricas.

1.7.4. Ondas planas longitudinales de presión en una columna de gas.

Estudiaremos ahora las soluciones de la ecuación de onda que representan ondas planas de presión en un fluido. Ondas de este tipo pueden producirse moviendo un pistón en un extremo de un tubo, despreciando el efecto del rozamiento, del intercambio de calor y de la pequeña deformación de las paredes. Así, consideremos la columna de gas de la figura a lo largo de la cual se propaga una perturbación. Análogamente al caso de la barra que vimos en una sección anterior,

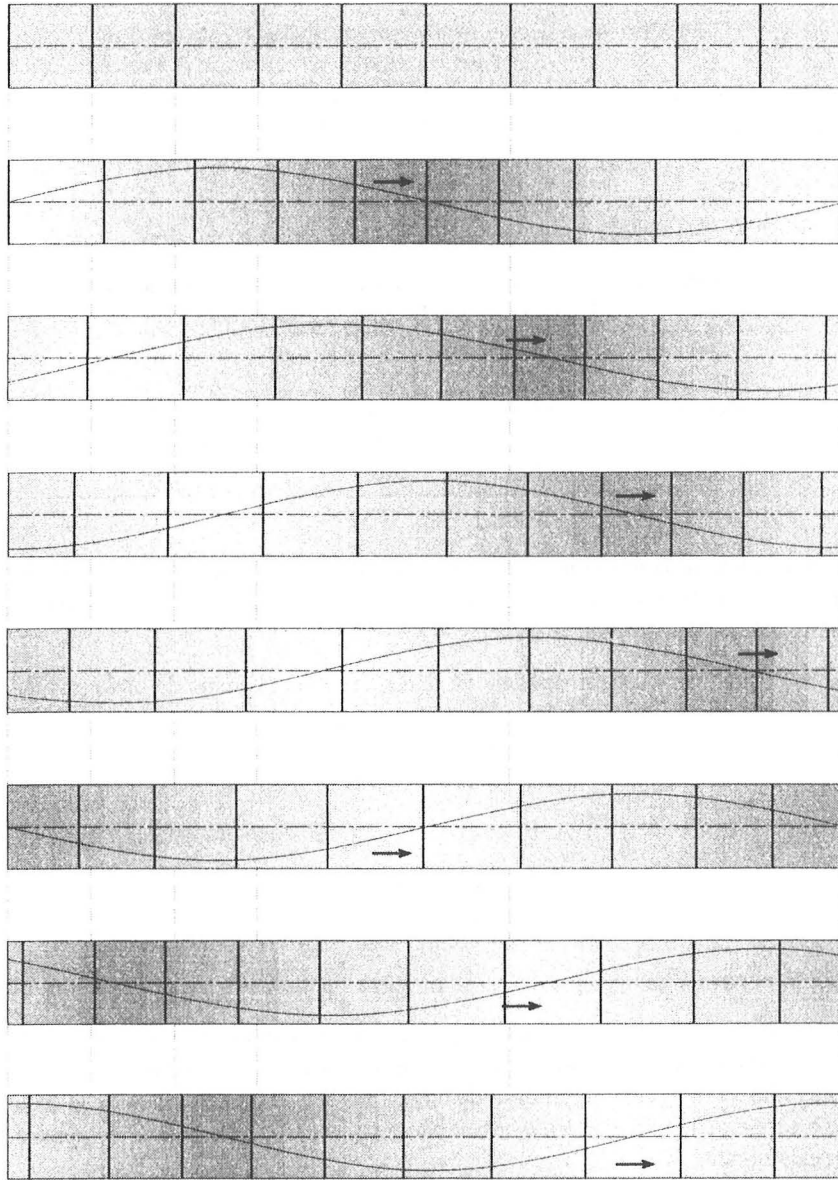


Figura 1-6 Propagación de una onda de presión en una columna de gas. Las distintas partículas de gas a lo largo de la columna oscilan alrededor de su posición de equilibrio. Esto da lugar a regiones en las que la presión aumenta (en tono más oscuro) y regiones en las que la presión disminuye (en tono más claro). La primera figura muestra la posición original de una serie de superficies equiespaciadas en la columna de gas antes de la perturbación, mientras que en las figuras inferiores se muestra cómo se ha desplazado cada una de las superficies y la forma de la onda de desplazamientos. La onda de presiones y la de velocidades están desfasadas $\pi/2$ radianes respecto de ésta. Las líneas verticales de trazos muestran, sobre las otras figuras las posiciones originales de cada superficie mostradas en la figura superior.

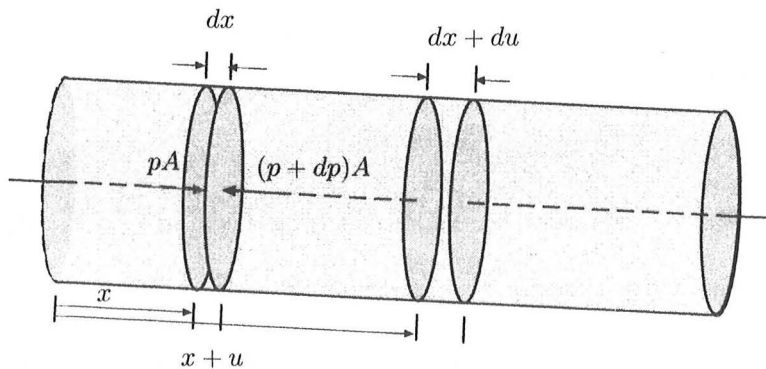


Figura 1-7 Propagación de una perturbación a lo largo de una columna de gas

Tabla 1-1 Velocidad del sonido y otras propiedades para algunos gases

Gas	c (ms ⁻¹)	ρ (kg/m ⁻³)	$\rho_0 c$ (kg m ⁻² s ⁻¹)	γ
Hidrógeno (H ₂)	1270	0,090	114	1,41
Nitrógeno (N ₂)	337	1,25	421	1,40
Aire	331	1,29	428	1,40
Oxígeno (O ₂)	317	1,43	453	1,40
Anhídrido carbónico (CO ₂)	258	1,96	508	1,30

Tabla 1-2 Velocidad del sonido y otras propiedades para algunos líquidos

Líquido	c (ms ⁻¹)	ρ (kg/m ⁻³)	$\rho_0 c$ 10 ⁶ (kg m ⁻² s ⁻¹)
Agua (4°C)	1418	1000	1,42
Agua (25°C)	1493	997,1	1,49
Mercurio	1450	13600	19,70
Etanol	1210	790	0,96
Metanol	1130	790	0,89

estudiaremos cómo afecta la perturbación a una rodaja cilíndrica de espesor infinitesimal dx . Cuando no hay perturbación la rodaja está a una distancia x del origen de coordenadas y su espesor es dx . Cuando el sistema está perturbado, la rodaja se desplaza a $x + u$ y su espesor pasa de ser dx a ser $dx + du$.

Como en este caso la propagación es unidimensional en la dirección x , el frente de onda es plano y la ecuación (1-73) pasa a ser

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{K}}{\rho_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (1-81)$$

con una velocidad de propagación $c = \sqrt{\mathcal{K}/\rho_0}$. El desplazamiento satisface una relación similar,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{K}}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1-82)$$

que en ambos casos corresponde a una onda plana que se propaga sin deformación en la dirección x con una velocidad c .

El sonido no es más que una serie de ondas de presión que se propagan en el aire. En el desarrollo que hemos efectuado se ha considerado el caso más habitual en el que la presión varía relativamente poco respecto de su valor de equilibrio. Si esta variación fuera muy alta, como puede ser el caso de una explosión cerca del origen de la misma, las aproximaciones que hemos utilizado no serían válidas y el cálculo matemático se complica. De hecho ni siquiera la ley de Hooke lineal (1-69) sería válida en esas condiciones.

Amplitud de desplazamiento, velocidad y presión de una onda armónica plana de desplazamiento. Impedancia de la onda

Consideremos una onda plana armónica que se desplaza en la dirección x . El desplazamiento expresado en notación compleja será de la forma

$$u = u_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad [u = u_0 \cos(kx - \omega t)]$$

mientras que la velocidad sería

$$v = \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega u_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad [u = u_0 \omega \sin(kx - \omega t)]$$

y la presión en forma compleja, sustituyendo en la ecuación (1-69) y teniendo en cuenta (1-42)

$$\varphi = -\mathcal{K}\theta = -\mathcal{K}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = -\mathcal{K} \frac{\partial u}{\partial x} = -ik u_0 \mathcal{K} e^{i(kx - \omega t)} \quad [\varphi = \mathcal{K} k u_0 \sin(kx - \omega t)] \quad (1-83)$$

lo que muestra que la presión oscila en torno a su valor promedio con una amplitud $\varphi_0 = \mathcal{K} k u_0$. Como $\mathcal{K} = \rho_0 c^2$, la expresión anterior queda

$$\varphi_0 = c^2 \rho_0 k u_0$$

o, eliminando k mediante la relación $k = \omega/c$

$$\wp_0 = c\rho_0\omega u_0 = 2\pi c\rho_0\nu u_0 \quad (1-84)$$

Observemos también que si el desplazamiento va como un coseno, la diferencia de presión oscila como un seno, esto es, cuando el desplazamiento alcanza sus valores extremos, la diferencia de presión es nula y viceversa.

La *impedancia* de la onda (también llamada *impedancia acústica específica*) es el cociente entre la diferencia de presión y la velocidad. Para este caso en que ambas están en fase, queda como el cociente entre las amplitudes correspondientes,

$$Z = \frac{\wp}{v} = \frac{k\mathcal{K}}{\omega} = \frac{k\rho_0 c^2}{\omega} = \rho_0 c \quad (1-85)$$

teniendo en cuenta que $\omega = kc$. El hecho de que la impedancia sea real indica que para una onda plana la presión acústica y la velocidad de las partículas del fluido que se mueven en la dirección de propagación están en fase.

Propagación de la energía para una onda plana de presión en un fluido

Para las ondas planas de presión en un fluido, la onda de desplazamiento es de la forma $u = u_0 \cos(kx - \omega t)$ y la onda de presión de la forma dada por (1-83), por lo que (1-77) da

$$\frac{dE_{tot}}{dV_0} = \left[\frac{1}{2}\rho_0\omega^2 + \frac{\mathcal{K}^2 k^2}{2\rho_0 c^2} \right] u_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = \rho_0\omega^2 u_0^2 \sin^2(kx - \omega t), \quad (1-86)$$

donde hemos utilizado $kc = \omega$ y $\mathcal{K} = \rho_0 c^2$ y que recuerda a la expresión (1-64) para la energía de un oscilador libre. El promedio temporal de esa expresión da

$$\mathcal{E}_t = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 u_0^2 = \frac{1}{2\rho_0 c^2} (c\rho_0\omega u_0)^2 = \frac{\wp_0^2}{2\rho_0 c^2} = \frac{\wp_{ef}^2}{\rho_0 c^2}. \quad (1-87)$$

La potencia promedio y la intensidad se obtienen de forma análoga a como se obtenían en (1-65) y (1-66) quedando, para la intensidad

$$I = \frac{\wp_0^2}{2\rho_0 c} = \frac{\wp_{ef}^2}{\rho_0 c} = \frac{\wp_0^2}{2Z} = \frac{\wp_{ef}^2}{Z} \quad (1-88)$$

que es constante a lo largo del desplazamiento de la onda plana si no hay disipación de energía. En realidad siempre hay una disipación de energía en esta propagación, produciéndose calor, y la intensidad de la onda disminuye durante la propagación de la misma de forma aproximadamente exponencial,

$$I(x) = I(x_0) e^{-2\alpha(x-x_0)} = I(x_0) e^{-m_\alpha(x-x_0)} \quad (1-89)$$

donde x_0 es un punto de referencia, $I(x_0)$ la intensidad en dicho punto, α la *constante de atenuación del medio*, de unidades[†] [neper/m]. En realidad, es $m_\alpha = 2\alpha$ la magnitud que se utiliza habitualmente en acústica de salas y que representa la constante de atenuación del medio para la intensidad, también con unidades [neper/m]. La atenuación de la amplitud eficaz de la onda de presión tiene lugar de la forma

$$\wp(x) = \wp(x_0) e^{-\alpha(x-x_0)} \quad (1-90)$$

en función de α que como vemos representa la constante de atenuación del medio para la amplitud de la presión eficaz.

[†]El neper es una unidad de medida del nivel de una magnitud o de atenuación, es similar al belio, pero definida en función del logaritmo neperiano,

$$L(\text{Np}) = \ln \left(\frac{F}{F_0} \right), \quad L(\text{B}) = \log \left(\frac{F}{F_0} \right)$$

donde F_0 es el valor de referencia.

1.7.5. Ondas esféricas de presión en un fluido.

La ecuación de ondas para una onda esférica que se propaga en un fluido y la solución para la onda de presión.

Consideremos ahora las ecuaciones para una onda de simetría esférica, es decir, una onda que se propaga de forma radial, de forma que la presión es función únicamente de r y t , siendo r la distancia desde el origen. En este caso la ecuación de ondas (1-73), expresada en coordenadas esféricas, es de la forma

$$\frac{\partial^2 \wp}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \wp}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \wp}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \wp) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \wp}{\partial t^2} \quad (1-91)$$

al tener únicamente dependencia radial. Si se realiza el cambio de variable $\wp(r, t) = \phi(r, t)/r$, la ecuación anterior queda en una forma más sencilla,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1-92)$$

que tiene el mismo aspecto que la ecuación de ondas correspondiente a una onda plana que se propaga sin deformación en una dimensión con velocidad c , y que sabemos tiene la solución genérica

$$\phi(r, t) = \phi_1(r - ct) + \phi_2(r + ct)$$

compuesta de ondas que se propagan en una u otra dirección, obviamente con la misma velocidad que se obtuvo para las ondas planas en un fluido,

$$c = \sqrt{\frac{\mathcal{K}}{\rho_0}} \quad (1-74)$$

por lo que la onda real de presión será de la forma genérica

$$\wp(r, t) = p - p_0 = \frac{1}{r} \phi_1(r - ct) + \frac{1}{r} \phi_2(r + ct) \quad (1-93)$$

con una dependencia con la inversa de r junto a la de ϕ . El primer término representa ondas esféricas salientes, que se alejan del origen y cuya amplitud disminuye de forma inversamente proporcional a la distancia al centro de la esfera, mientras que el segundo término representa ondas esféricas entrantes, que convergen hacia el origen y cuya amplitud aumenta con $1/r$ según se acercan.

Presión, desplazamiento y velocidad local para una onda armónica esférica.

Estudiemos ahora en mayor detalle una onda de presión armónica saliente. Ésta tiene la forma

$$\wp = p - p_0 = \wp_0(r) \cos(kr - \omega t) = \frac{\phi_0}{r} \cos(kr - \omega t) \quad (1-94)$$

donde la amplitud de la onda de presión es $\wp_0 = \phi_0/r$ (con ϕ_0 que no depende de r) que disminuye con la distancia a la fuente. Esta misma ecuación se podría haber escrito en forma exponencial compleja, siendo (1-94) su parte real,

$$\wp = p - p_0 = \wp_0(r) e^{i(kr - \omega t)} = \frac{\phi_0}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (1-95)$$

Supondremos asimismo que la onda se propaga indefinidamente (o es completamente absorbida en las superficies a las que llega, como ocurre en una cámara anecoica).

Para obtener la forma de la onda de desplazamientos y la velocidad local para una onda esférica partiremos de la ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} p + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1-68)$$

El operador gradiente tiene, en coordenadas esféricas, la forma

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

por lo que en simetría esférica $\vec{\nabla}\phi = \partial\phi/\partial r$ queda como

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{u}_r = \phi_0 \left[-\frac{1}{r^2}e^{i(kr-\omega t)} + \frac{ik}{r}e^{i(kr-\omega t)} \right] \vec{u}_r.$$

Si consideramos que la densidad varía poco respecto de la densidad en el equilibrio ρ_0 se tendría, a partir de la ecuación de continuidad (1-68),

$$-\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{u}_r = \frac{\phi_0}{r} \left[-\frac{1}{r} + ik \right] e^{i(kr-\omega t)} \vec{u}_r.$$

Integrando respecto del tiempo se obtendría la velocidad local,

$$-\rho_0 \vec{v} = \frac{\phi_0}{r\omega} \left[\frac{i}{r} + k \right] e^{i(kr-\omega t)} \vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = -\frac{\phi_0}{\rho_0 \omega r} \left[\frac{i}{r} + k \right] e^{i(kr-\omega t)} \vec{u}_r, \quad (1-96)$$

e integrando de nuevo, el desplazamiento de las partículas del fluido al paso de la onda,

$$-\rho_0 \vec{u} = \frac{\phi_0}{r\omega^2} \left[\frac{1}{r} - ik \right] e^{i(kr-\omega t)} \vec{u}_r \Rightarrow \vec{u} = \frac{\phi_0}{\rho_0 \omega^2 r} \left[-\frac{1}{r} + ik \right] e^{i(kr-\omega t)} \vec{u}_r, \quad (1-97)$$

A grandes distancias de la fuente el término en $1/r$ se hace despreciable y el desplazamiento puede expresarse con buena aproximación como

$$\vec{u} = \frac{-\phi_0}{\rho_0 \omega^2 r} ik e^{i(kr-\omega t)} \vec{u}_r,$$

cuya parte real es

$$u = \frac{\phi_0 k}{\rho_0 \omega^2 r} \sin(kr - \omega t) = \frac{\phi_0(r)}{\rho_0 \omega c} \sin(kr - \omega t) = u_0(r) \sin(kr - \omega t) \quad (1-98)$$

Como se ve, para puntos alejados del emisor, la amplitud de la onda de desplazamientos también disminuye como $1/r$, de forma inversamente proporcional a la distancia a la fuente,

$$u = u_0(r) \sin(kr - \omega t) = \frac{\zeta_0}{r} \sin(kr - \omega t).$$

donde la relación entre u_0 y ϕ_0 viene dada, a grandes distancias, por

$$\phi_0(r) = c\rho_0\omega u_0(r) = 2\pi c\rho_0\nu u_0(r) \Leftrightarrow \phi_0 = c\rho_0\omega\zeta_0 = 2\pi c\rho_0\nu\zeta_0, \quad (1-99)$$

expresión similar a la (1-84) que obtuvimos para las ondas planas, pero con u_0 y ϕ_0 dependiendo de r . Hay que insistir en que ahora estas expresiones son válidas únicamente a grandes distancias de la fuente.

Impedancia de una onda esférica en un fluido.

La impedancia de la onda esférica en un punto del fluido queda como

$$Z = \frac{\phi}{v} = \frac{\phi_0/r}{\left[\frac{i}{r} + k \right] \phi_0/\rho_0\omega r} = \frac{\rho_0\omega}{\frac{i}{r} + k} = \frac{\rho_0 c}{1 + i/kr} \quad (1-100)$$

que consta de una parte real y de una parte imaginaria. Lejos de la fuente la parte imaginaria se hace cero y la parte real se puede aproximar por

$$Z = \rho_0 c \quad (1-101)$$

lo que significa que lejos de la fuente de nuevo ambas magnitudes, presión diferencial y velocidad, están en fase.

Se suele denominar *resistencia acústica específica* a la parte real de la impedancia y *reactancia acústica específica* a la parte imaginaria.

Energía de una onda esférica lejos de la fuente. Intensidad de la misma.

Para obtener la intensidad de la onda esférica (1-94) lejos de la fuente utilizaremos la recién obtenida ecuación (1-98) y la ecuación (1-77) teniendo en cuenta que ahora la amplitud es $u_0(r) = \zeta_0/r$ en vez de u_0 . Así, la energía por unidad de volumen o densidad de energía queda como

$$\mathcal{E}_t = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 u_0^2(r) = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega^2 \zeta_0^2(r)}{r^2} = \frac{\wp_0^2(r)}{2c^2 \rho_0} = \frac{\phi_0^2}{2c^2 \rho_0 r^2}$$

que disminuye como $1/r^2$. Puede verse que la relación entre la intensidad de una onda esférica y la densidad de energía es de la forma (1-66), por lo que se tiene para la intensidad lejos de la fuente emisora,

$$I = c\mathcal{E}_t = \frac{\wp_0^2(r)}{2\rho_0 c} = \frac{\wp_{ef}^2(r)}{\rho_0 c} = \frac{\wp_0^2(r)}{2Z} = \frac{\wp_{ef}^2(r)}{Z} = \frac{\phi_0^2}{2c\rho_0 r^2} = \frac{I_0}{r^2} \quad (1-102)$$

donde

$$I_0 = \frac{\phi_0^2}{2c\rho_0} = \frac{\phi_{ef}^2}{c\rho_0} = \frac{\phi_0^2}{2Z} = \frac{\phi_{ef}^2}{Z}, \quad (1-103)$$

la intensidad de una onda esférica es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente emisora. La energía que atraviesa en la unidad de tiempo una superficie esférica de radio r es por tanto,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = I 4\pi r^2 = 4\pi I_0 \quad (1-104)$$

que ya no depende de r como era de esperar, ya que la energía total que atraviesa las distintas superficies esféricas debe ser la misma si no hay disipación de energía. Como en realidad siempre hay disipación de energía en forma de calor, la intensidad para una onda esférica disminuye de la forma aproximada

$$I_0(r) = I_0(r_0) e^{-2\alpha(r-r_0)} \Rightarrow I(r) = I(r_0) \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 e^{-2\alpha(r-r_0)} = I(r_0) \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 e^{-m_\alpha(r-r_0)} \quad (1-105)$$

donde r_0 es un punto de referencia, $I(r_0)$ la intensidad en dicho punto, α la *constante de atenuación del medio para la presión* [neper/m], y m_α la constante de atenuación del medio para la intensidad [neper/m]. Para la amplitud eficaz de la onda de presión se tiene,

$$\wp(r) = \wp(r_0) \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 e^{-\alpha(r-r_0)} \quad (1-106)$$

Energía en el caso general

En el caso más general la potencia por unidad de superficie transmitida por la fuente al medio puede escribirse como

$$\dot{W} = \dot{u}\wp = \dot{u}^2 Z \quad (1-107)$$

y consta de dos partes, una real y una imaginaria. La parte real avanza con la onda mientras que la parte imaginaria se emplea en dilatar la superficie de la onda, quedando acumulada en forma de energía potencial. Esta componente, a la que se denomina reactiva tiene un valor apreciable sólo en la primera fase de la propagación.

1.7.6. Ondas superficiales en un líquido.

Las ondas superficiales que se forman en la superficie libre de un líquido tienen una naturaleza distinta de las anteriores, ya que no son ni como las ondas de presión ni como las ondas en una membrana elástica tensa (la superficie libre del agua), sino bastante más complicadas.

Al perturbar la superficie se generarán ondas, con alternativamente valles y crestas, pero esto no puede corresponder a movimiento simple arriba y abajo, ya que el agua no puede ir para abajo al ser prácticamente incompresible, sino que debe desplazarse a los lados, saliendo de donde está. Lo que ocurre en la realidad es que ya no tenemos ni una onda transversal ni una longitudinal, sino una mezcla de ambas, ya que el agua que se encuentra cerca de la superficie se mueve aproximadamente en circunferencias, para el caso de ondas de longitud de onda larga en aguas profundas. Este estado de movimiento se aprecia en la superficie del agua como una ondulación que se propaga con una cierta velocidad.

La velocidad de propagación estas ondas es mayor para aguas profundas que para aguas poco profundas, y ésta es la razón de que las olas rompan cuando llegan a la playa. El libro de Feynmann[3] tiene una interesante discusión sobre esto.

1.8. Ondas electromagnéticas.

Hasta ahora hemos visto diversos ejemplos de ondas mecánicas longitudinales y transversales que se propagan a lo largo de un medio. No necesariamente el movimiento ondulatorio implica un movimiento mecánico, sino que comprende cualquier tipo de perturbación que se propaga a través de un medio. Por ejemplo una perturbación de un campo eléctrico o magnético que se propaga a través de un medio también entra dentro del movimiento ondulatorio. Este es el caso de las ondas electromagnéticas, en las que un campo eléctrico y un campo magnético armónicos, perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación se propagan en el espacio, como se ve en la figura 1-8.

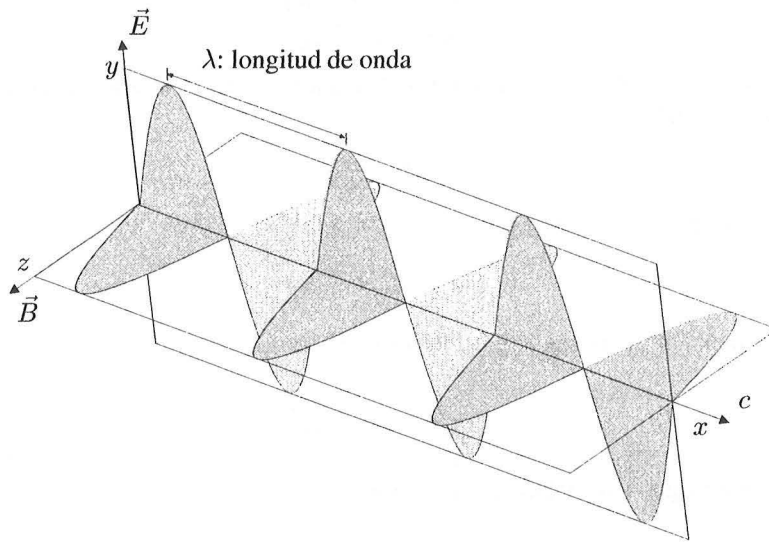


Figura 1-8 Una onda electromagnética está formada por una perturbación armónica del campo eléctrico y del campo magnético que se propagan en el espacio con velocidad c . Ambos campos están en fase y sus amplitudes están relacionadas por $E = cB$.

1.8.1. Ondas planas

Consideremos las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo para el vacío (no hay cargas libres ni corrientes, $\rho = 0$ y $\vec{j} = 0$), para una solución particular consistente en un campo eléctrico $\vec{E}$ según el eje y y un campo magnético $\vec{B}$ según el eje z perpendiculares entre sí, y a la dirección de propagación x ,

$$E_x = 0 \quad E_y = E \quad E_z = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = (0, E, 0)$$

$$B_x = 0 \quad B_y = 0 \quad B_z = B \quad \rightarrow \quad \vec{B} = (0, 0, B)$$

quedando las ecuaciones de Maxwell como

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0 \quad \text{Ley de Gauss para el campo eléctrico} \quad (1-108a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = 0 \quad \text{Ley de Gauss para el campo magnético} \quad (1-108b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad \text{Ley de Faraday-Henry (z)} \quad (1-108c)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{Ley de Faraday-Henry (x)} \quad (1-108d)$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = 0 \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell (y)} \quad (1-108e)$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell (x)} \quad (1-108f)$$

Como se deduce de las ecuaciones (1-108a), (1-108b), (1-108c) y (1-108e), ni E ni B dependen de y o z . Por tanto los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ dependen sólo de x y t , teniendo en cada instante cualquiera de ellos el mismo valor en cualquier plano perpendicular al eje x .

Si derivamos la ecuación (1-108d) respecto de x se tiene

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t}$$

y derivamos (1-108f) respecto de t se tiene

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

que combinadas dan

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad (1-109)$$

que es de la forma de la ecuación de ondas (1-2), lo que indica que la solución anterior corresponde a un campo eléctrico que se propaga con una velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (1-110)$$

como una onda plana, y que se puede expresar en la forma

$$E = E(x - ct) \quad (1-111)$$

Para el campo magnético también se obtiene la ecuación de ondas en la forma

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad (1-112)$$

lo que implica que el campo magnético también es de la forma

$$B = B(x - ct) \quad (1-113)$$

Igualmente se podrían haber utilizado las soluciones $E(x + ct)$ y $B(x + ct)$, pero por simplicidad utilizaremos únicamente las $x - ct$.

1.8.2. Ondas planas armónicas

Consideremos ahora el caso particular de ondas planas armónicas de frecuencia $\nu = \omega/2\pi$ y longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$. En este caso particular la forma de los campos eléctrico y magnético es, para propagación hacia la parte positiva del eje de las x ,

$$\begin{aligned} E &= E_0 \sin k(x - ct) = E_0 \sin(kx - \omega t) \\ B &= B_0 \sin k(x - ct) = B_0 \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (1-114)$$

donde hemos utilizado la relación $\omega = kc$. Estas expresiones deben cumplir la ecuación (1-108d), teniéndose para cada derivada parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= kE_0 \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= -\omega B_0 \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

que al sustituir da la relación entre las amplitudes del campo eléctrico y magnético,

$$E_0 = \frac{\omega}{k} B_0 = cB_0 \quad \Rightarrow \quad E = cB \quad (1-115)$$

que implica directamente que los campos E y B están en fase, ya que c es una magnitud real y por tanto E_0 y B_0 lo están (no hay ningún factor complejo que introduzca un desfase) y lo mismo E y B que tienen factores similares.

La que acabamos de ver no es la única solución aceptable de las ecuaciones de Maxwell en forma de onda plana que se propaga según la dirección x (que satisface además la ecuación de ondas para propagación según x), ya que hay otras que satisfacen la condición de que el vector resultante del producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ esté dirigido en el sentido de propagación de la onda electromagnética, que es la que da las relaciones de signos correctas para que se satisfagan las ecuaciones de

Maxwell. Por ejemplo, y manteniendo la dirección de propagación a lo largo del eje x con sentido positivo, una solución con el campo eléctrico dirigido según $+z$ y el campo magnético según $-y$ también sería válida.

Otra solución posible es aquella en la que en todo momento los campos eléctrico y magnético se mantienen perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación, que permanece fija, pero rotando el plano de oscilación de los campos eléctrico y magnético a lo largo de la propagación en torno a ésta. En este caso se tiene una onda polarizada circularmente, mientras que en el caso anterior en el que permanece invariable el plano de oscilación de los campos eléctrico y magnético se tiene una onda polarizada linealmente. En el caso de una onda circularmente polarizada, los campos eléctrico y magnético se expresarían de la forma

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \sin(kx - \omega t) & E_z &= \pm E_0 \cos(kx - \omega t) \\ B_y &= \mp B_0 \cos(kx - \omega t) & B_z &= B_0 \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (1-116)$$

donde hay dos posibilidades de signos dependiendo de si el giro es a derechas o a izquierdas.

1.8.3. Energía de una onda electromagnética

En los textos de electromagnetismo (Véase por ejemplo [2]) se ve que la densidad de energía asociada con el campo eléctrico de una onda electromagnética en el vacío es

$$\mathcal{E}_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (1-117)$$

y que la densidad de energía magnética en el vacío es

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (1-118)$$

que teniendo en cuenta que $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ y que $E = cB$ queda

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

la densidad de energía eléctrica de una onda electromagnética es igual a la densidad de energía magnética. Por tanto la densidad de energía total del campo electromagnético es

$$\mathcal{E}_{OEM} = \epsilon_0 E^2 \quad (1-119)$$

1.8.4. Intensidad de una onda electromagnética

La intensidad instantánea de la onda electromagnética (energía que atraviesa la unidad de área en la unidad de tiempo) será

$$I(x, t) = \mathcal{E}_{OEM} c = c \epsilon_0 E^2 \quad (1-120)$$

mientras que la intensidad promedio será

$$I = \overline{\mathcal{E}_{OEM} c} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad (1-121)$$

al tener E forma armónica.

1.8.5. El vector de Poynting

Consideremos ahora el producto vectorial $c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ para el caso de una onda electromagnética plana. Este vector apunta hacia la dirección y sentido de propagación y tiene como módulo

$$|c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}| = c^2 \epsilon_0 E B = c \epsilon_0 E^2$$

que es la intensidad instantánea dada por la ecuación (1-120). Al vector

$$c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad (1-122)$$

se le denomina vector de Poynting. El flujo de este vector de Poynting a través de una superficie A ,

$$\int_A c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} d\vec{A} = \frac{dE}{dt} \quad (1-123)$$

es la energía que fluye a través del área A por unidad de tiempo, dada por otra parte por dE/dt .

1.9. Velocidad de grupo y velocidad de fase

Aunque ya hemos hablado de ondas que pueden descomponerse en serie de ondas armónicas no nos hemos detenido en las propiedades de la onda resultante, sino únicamente en las de cada una de las ondas armónicas en que se descompone. Cada una de estas ondas se propaga con una velocidad dada por la ecuación (1-8) $c = \omega/k$, que representa la velocidad a la que se propaga una cierta fase, o un cierto estado de la perturbación, y denominamos a esta velocidad *velocidad de fase* de la onda. La velocidad de propagación de la onda no necesariamente coincide con la velocidad de movimiento de ninguna entidad física, por ejemplo la velocidad de propagación de una onda plana de presión en el aire no coincide con la velocidad de las moléculas del aire por las que pasa la onda, solamente representa la velocidad a la que se propaga el estado de movimiento de las mismas, no su velocidad.

En principio una onda armónica “pura” no podría transmitir más información que su frecuencia y su longitud de onda, pero en la práctica no es posible hablar de una onda armónica “pura” más que para analizar su propagación en un desarrollo de Fourier, ya que cualquier onda debe tener un principio y un final cuando llega a un receptor. Esto hace que en esta onda con principio y fin tengamos en realidad una serie de ondas superpuestas que a través de una serie o integral de Fourier dan la onda que estamos estudiando. De hecho aquí solo podríamos hablar de velocidad de fase en el intervalo de existencia de la onda. Por tanto, para transmitir información real mediante una onda ésta no puede ser una onda armónica, sino que necesitaremos ondas no armónicas y en general no periódicas.

En el caso más general, la velocidad de propagación de la onda dependerá de la frecuencia (o la longitud de onda) de la misma. En este caso decimos que se produce *dispersión* y se denomina *medio dispersivo* al medio en el que tiene lugar este comportamiento y *medio no dispersivo* en caso contrario.

Como consecuencia de esto, si por ejemplo las ondas sonoras de alta frecuencia viajaran más rápido que las de baja frecuencia, un pulso de sonido se oiría a una cierta distancia como una sucesión de sus distintas componentes, primero las de alta frecuencia y después las de baja frecuencia. Análogamente ocurriría con un pulso de luz blanca, que al viajar a través de un medio dispersivo se vería, si las bajas frecuencias viajaran más rápido que las altas, primero como luz roja, luego verde y luego azul. La experiencia diaria nos dice que esto no es así en el aire, en el que las ondas sonoras viajan de forma esencialmente independiente de la frecuencia y lo mismo ocurre con las ondas electromagnéticas viajando a través del aire o del vacío, pero puede ocurrir cuando estas ondas se propagan a través de distintos medios. Así, en general, únicamente las ondas estrictamente armónicas se propagarían conservando la forma.

Cuando se tiene un medio dispersivo, si c disminuye con la frecuencia en algún rango de frecuencias, se dice que el medio presenta *dispersión normal* en ese rango mientras que si aumenta con la frecuencia en ese rango se dice que el medio presenta *dispersión anómala* en ese rango. Ésta es una terminología que tiene su origen en la óptica.

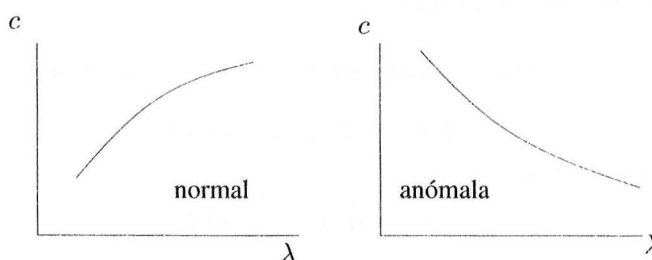


Figura 1-9 Dispersión normal y anómala

Consideremos ahora el caso de una onda de forma arbitraria que se propaga en un medio dispersivo. En medios lineales esta onda puede descomponerse en una serie de ondas armónicas mediante el análisis de Fourier. La velocidad de fase de cada una de las componentes armónicas viene dada por la ecuación de onda para esa onda concreta. En un instante posterior, se puede obtener la forma de la onda resultante sumando las ondas individuales que la componen. Recordemos que si la onda es periódica, las componentes se obtienen como una serie de Fourier, mientras que si la onda es no periódica, las componentes se obtienen a través de una integral de Fourier. Ahora bien, si el medio es dispersivo, cada componente se propaga con distinta velocidad y por tanto, una onda de perfil arbitrario que se propaga en un medio dispersivo cambia de forma según se propaga. Denominaremos *velocidad de grupo* a la velocidad con que se propaga el pulso.

Estudiaremos lo que queremos decir con esto a partir del paquete más sencillo, el formado por dos únicas ondas armónicas de igual amplitud, pero frecuencias ligeramente distintas, con $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, por lo que sus longitudes de onda también

difierirán levemente, con $\delta k = k_1 - k_2$

$$\chi_1 = A e^{i[(k + \frac{1}{2}\delta k)x - (\omega + \frac{1}{2}\delta\omega)t]} \quad (1-124a)$$

$$\chi_2 = A e^{i[(k - \frac{1}{2}\delta k)x - (\omega - \frac{1}{2}\delta\omega)t]} \quad (1-124b)$$

Así, estas ondas tienen la misma amplitud, pero los números de onda difieren en δk y las frecuencias angulares difieren en $\delta\omega$, con k el número de onda promedio y ω la frecuencia angular promedio de las dos ondas.

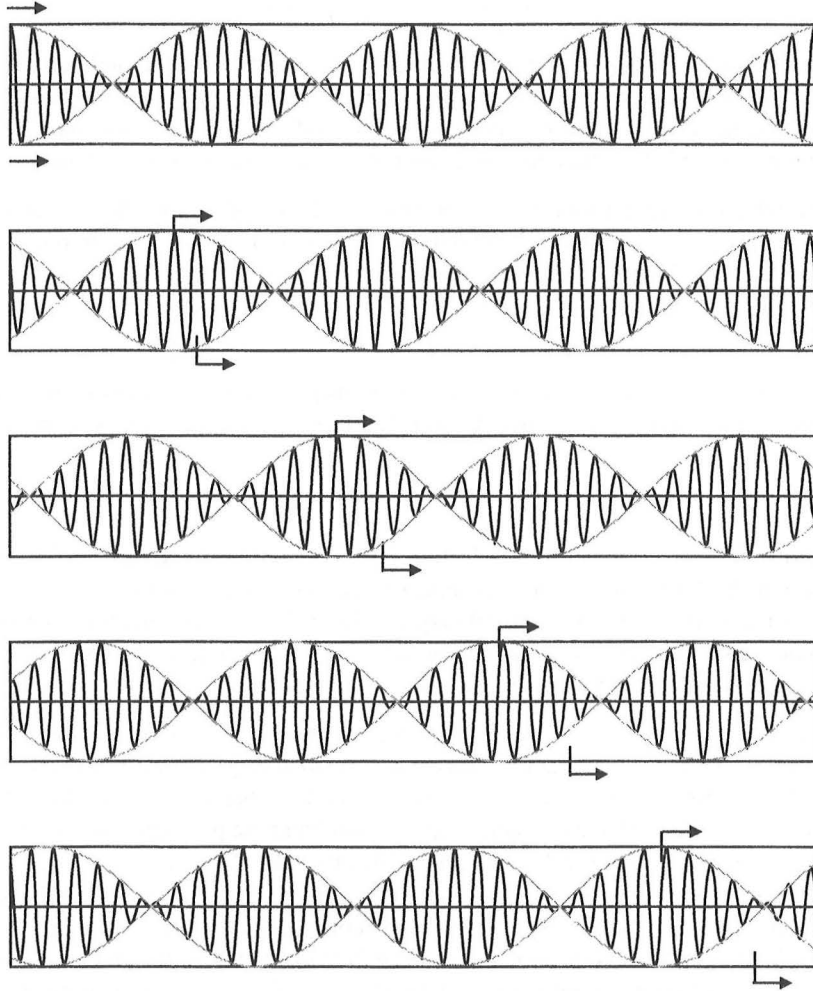


Figura 1-10 Paquete de ondas resultante de la composición de dos ondas de la misma amplitud y frecuencias y números de onda próximos. El tiempo corre hacia abajo y la línea en la parte superior de cada gráfico representa el movimiento de la envolvente con la velocidad de grupo v_g , mientras que la línea en la parte inferior representa el movimiento con la velocidad de fase del paquete v_f .

Aunque en ciertos puntos en el medio las ondas estén en fase en un instante determinado, en otras posiciones o en otros instantes de tiempo esto no será así. En este caso, la onda resultante tiene un aspecto similar a las pulsaciones que se ven en la sección 1.4.1 y la figura 1-7, ambas de la referencia [4], pero con una particularidad nueva muy importante; como se muestra en la figura 1-10 tanto la envolvente como la onda resultante misma se están propagando, no están quietas en el espacio sino que se están propagando en el mismo y con velocidades en general distintas. Es precisamente a la velocidad con que se propaga la envolvente a lo que denominamos *velocidad de grupo* o velocidad con que se propaga el pulso.

Aunque cada una de las ondas viaje con su velocidad de fase (ligeramente distinta para cada una de ellas si el medio es dispersivo e igual para ambas si no lo es) el patrón de pulsaciones viajará con la velocidad de grupo, que puede llegar a ser bastante distinta del promedio de las velocidades de fase de las ondas individuales, que será ω/k , al ser k y ω los respectivos valores promedio. Denominamos *velocidad de fase del paquete* a este promedio dado por el cociente

$$c_f = \frac{\omega}{k}, \quad (1-125)$$

donde ahora ω es la frecuencia angular promedio y k el vector de onda promedio, en vez de las frecuencias y vectores de onda de cada una de las ondas individuales.

Analicemos un poco más la onda resultante. La superposición de las dos ondas puede escribirse como

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 = A \left[e^{i[\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta \omega}{2}t]} + e^{-i[\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta \omega}{2}t]} \right] e^{i(kx - \omega t)}$$

y la onda física por la parte real de esta ecuación,

$$\chi = 2A \cos\left(\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta \omega}{2}t\right) \cos(kx - \omega t) \quad (1-126)$$

La onda resultante tiene un número de onda k que es el promedio de los números de onda de las dos componentes y una longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$. Como se ve en la figura 1-10, la amplitud de la onda está modulada, teniendo la envolvente un número de onda $\delta k/2$, la mitad de la diferencia entre los números de onda de las dos componentes. Aunque la longitud de onda de la modulación es $4\pi/\delta k$, la separación entre dos pulsaciones consecutivas es la mitad de esa distancia, $2\pi/\delta k$.

Si en vez de considerar la evolución espacial de la elongación χ de la onda en un determinado instante de tiempo, se considera la evolución temporal de la resultante en un punto determinado se tiene un comportamiento similar donde ahora en vez del eje x se tiene el eje de tiempos t . Las pulsaciones viajan entonces con la velocidad

$$c_g = \frac{\delta \omega}{\delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \rightarrow c_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1-127)$$

que es la velocidad a la que hemos denominado velocidad de grupo. Nótese que hemos utilizado el hecho de que las frecuencias de las ondas son muy próximas. A partir de las relaciones $\omega = kc$ y $\lambda = 2\pi/k$, ésta se escribe como

$$c_g = c + k \frac{dc}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \quad (1-128)$$

Si se conoce la dependencia $c(k)$ de la velocidad de fase con el número de onda es posible calcular la velocidad de grupo del paquete. Para un medio no dispersivo c es independiente de k y por tanto $c_f = c_g$, no habiendo en este caso diferencia entre las velocidades de grupo y de fase del paquete. Sin embargo, en un medio dispersivo sí habrá diferencia y la velocidad de grupo puede ser tanto menor como mayor que la velocidad de fase, dependiendo de si se tiene dispersión normal o anómala, y se producirá deformación del paquete.

Hay otra cosa que debemos destacar, la velocidad de grupo representa la velocidad de transmisión de la señal únicamente en condiciones de dispersión normal o en general, cuando la velocidad de grupo es menor que la velocidad de fase. De hecho, jugando con valores arbitrarios de ω y λ en (1-127) se podría obtener una velocidad de grupo arbitrariamente grande a partir de ondas relativamente lentas, o incluso que la envolvente se propague en sentido contrario, lo que obviamente no puede corresponder a la velocidad de propagación de una señal. Otro caso es el de una onda electromagnética que se propaga en un medio dispersivo en condiciones de dispersión anómala, donde la velocidad de grupo puede ser mayor que la velocidad de la luz en el vacío, como ocurre con la propagación de rayos X en un cristal de carbono. Ésto es menos sorprendente de lo que parece, lo que no puede superar la velocidad de la luz en el vacío es la velocidad de transmisión de una señal o la velocidad de movimiento de una partícula, y ésto no ocurre en ninguno de los casos anteriores. En realidad no es posible transmitir información a una velocidad mayor que la menor de las velocidades de fase de las ondas individuales.

Aunque la ecuación (1-127) que se acaba de obtener es válida de forma estricta solo para el paquete tratado, que contiene dos ondas ligeramente de frecuencias y números de onda ligeramente distintos, sigue siendo útil para paquetes de ondas armónicas más complejos en los que interviene un rango de frecuencias, mientras que en ese rango ω sea una función que varía lentamente con k .

1.10. El efecto Doppler[†]

Cuando la fuente y el observador se encuentran en movimiento relativo, la frecuencia con que llegan al observador es distinta de la frecuencia con que han sido emitidas por la fuente, debido al fenómeno conocido como efecto Doppler. En la figura 1-11 se muestra la causa de este efecto. Cuando la fuente emisora está en movimiento, los máximos de la onda emitida llegan con mayor frecuencia cuando la fuente va al encuentro del receptor, y con menor frecuencia cuando la fuente se aleja del receptor.

[†]Llamado así en honor al científico austríaco Christian Doppler, 1803-1853

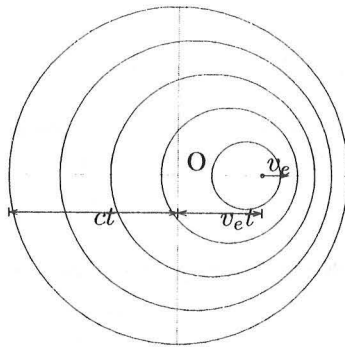


Figura 1-11 Efecto Doppler para una velocidad de movimiento de la fuente emisora menor que la velocidad de propagación de la onda.

1.10.1. El efecto Doppler en una dimensión.

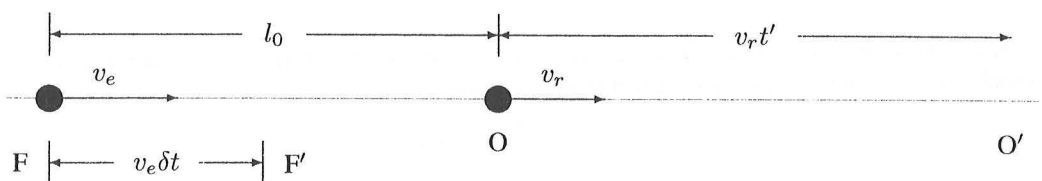


Figura 1-12 Efecto Doppler en una dimensión

Consideremos la situación que se muestra en la figura 1-12. Un emisor de ondas F se mueve hacia la derecha con una velocidad v_e mientras que el receptor O se mueve también hacia la derecha con una velocidad v_r . En el instante inicial $t = 0$ en el que el emisor emite una onda, la distancia entre el emisor y el receptor es l_0 , llegando la onda al receptor en un tiempo t . Durante ese tiempo el receptor ha recorrido una distancia $v_r t$ y la distancia total que la onda ha recorrido en ese tiempo t es $l_0 + v_r t$, que si c es la velocidad de propagación de la onda se puede escribir como

$$ct = l_0 + v_r t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{l_0}{c - v_r}$$

Transcurrido un tiempo δt el emisor ha avanzado una distancia $v_e \delta t$ y emite una nueva onda que llegará al receptor transcurrido un tiempo t' medido desde el origen de tiempos común. La distancia recorrida por la onda será ahora $(l_0 - v_e \delta t) + v_r t'$ que, ya que esta segunda onda ha viajado durante un tiempo $(t' - \delta t)$ a una velocidad c nos da

$$c(t' - \delta t) = l_0 - v_e \delta t + v_r t' \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{l_0 + (c - v_e) \delta t}{c - v_r}$$

por lo que el intervalo en el que llegan al receptor las dos ondas emitidas por el emisor con una separación δt es

$$\delta t' = t' - t = \frac{c - v_e}{c - v_r} \delta t.$$

Si el emisor emite ondas con una frecuencia ν , en el intervalo de tiempo δt habrá emitido $\nu \delta t$ ondas. Como esas mismas ondas las recibe el receptor en un intervalo de tiempo $\delta t'$, la frecuencia con que el receptor recibe las ondas es $\nu' = \nu \delta t / \delta t'$ (ya que $\nu \delta t = \nu' \delta t'$), que se escribe como

$$\nu' = \frac{c - v_r}{c - v_e} \nu \quad (1-129)$$

y que nos da la relación entre la frecuencia ν con que emite la fuente y la frecuencia ν' con que el observador recibe la señal.

Cuando la velocidad de desplazamiento de la fuente emisora v_e y la velocidad de desplazamiento del receptor v_r son pequeñas comparadas con la velocidad c de propagación de la onda, es posible simplificar la ecuación anterior aprovechando el desarrollo en serie

$$\left(1 - \frac{v_e}{c}\right)^{-1} \approx \left(1 + \frac{v_e}{c}\right)$$

quedando

$$\nu' = \left(1 - \frac{v_r}{c}\right) \left(1 + \frac{v_e}{c}\right) = \left(1 - \frac{v_r}{c} + \frac{v_e}{c} - \frac{v_r v_e}{c^2}\right) \nu = \left(1 - \frac{v_r - v_e}{c}\right) \nu$$

donde se ha despreciado el término de segundo orden $v_r v_e / c^2$. En función de la velocidad relativa del receptor respecto de la fuente emisora, $v_{re} = v_r - v_e$, esta expresión se escribe como

$$\nu' = \left(1 - \frac{v_{re}}{c}\right) \nu \quad (1-130a)$$

que, teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi\nu$ se puede expresar para la frecuencia angular,

$$\omega' = \left(1 - \frac{v_{re}}{c}\right) \omega \quad (1-130b)$$

Cuando el observador se aleja de la fuente, v_{re} es positiva y la frecuencia medida es menor (la longitud de onda es mayor), mientras que si el observador se acerca a la fuente, v_{re} es negativa y la frecuencia medida es mayor (longitud de onda menor).

1.10.2. El efecto Doppler en el espacio

Cuando la fuente y el observador no se mueven en la misma dirección, sino de forma que sus direcciones de movimiento forman un ángulo θ , las ecuaciones anteriores quedan en la forma

$$\nu' = \left(1 - \frac{v_{re}}{c} \cos \theta\right) \nu \quad (1-131a)$$

$$\omega' = \left(1 - \frac{v_{re}}{c} \cos \theta\right) \omega \quad (1-131b)$$

1.10.3. Ondas de choque

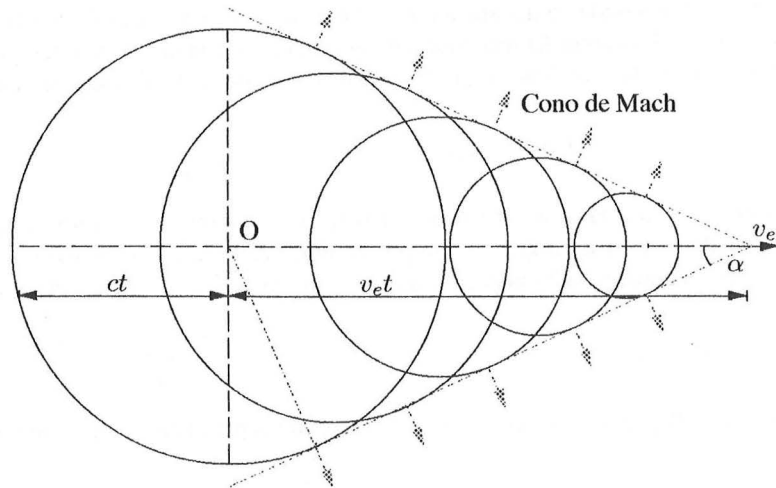


Figura 1-13 Cuando la velocidad de la fuente emisora es mayor que la velocidad de propagación de la onda se tienen ondas de choque. Se denomina cono de Mach a la envolvente de esas ondas de choque.

Un caso especial se tiene cuando la velocidad relativa entre el observador y la fuente es mayor que la velocidad de propagación c de la onda. En este caso, la fuente avanza con más rapidez que el frente de onda. La superficie tangente a todas las ondas sucesivas es un cono cuyo eje es la línea recta descrita por la fuente en su movimiento y cuyo ángulo α de apertura viene dado por

$$\text{sen } \alpha = \frac{c}{v_e} \quad (1-132)$$

En este caso el movimiento ondulatorio es una onda cónica que se propaga en las direcciones perpendiculares a la envolvente, a la que se denomina onda de Mach u onda de choque. Esta onda es el sonido brusco que se escucha cuando un avión que viaja a una velocidad superior a la del sonido pasa cerca de nosotros, aunque también se observa en otras circunstancias, como cuando un barco se mueve sobre el agua a una velocidad mayor que la velocidad de las ondas superficiales en el agua.

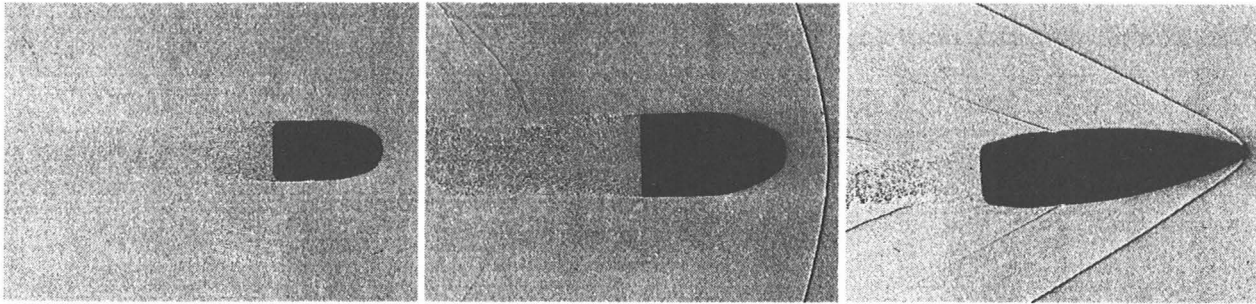


Figura 1-14 Una bala atraviesa un fluido a una velocidad menor (izquierda), ligeramente mayor (centro, mach 1,01, la forma redondeada favorece una alta presión delante de la bala que hace que el cono esté ligeramente por delante) y claramente mayor (derecha) que la del sonido en el mismo.



Figura 1-15 Un avión F/A-18 rompe la barrera del sonido. (Foto de la US Navy realizada por John Gay).

1.11. Reflexión, refracción y difracción de una onda

1.11.1. El principio de Huygens.

Christiaan Huygens (1629-1695), astrónomo, matemático y físico holandés nacido en La Haya, propuso un método para estudiar la evolución del frente de onda de un movimiento ondulatorio. En su trabajo utilizó modelos geométricos elaborados sobre papel que comparaba con los resultados experimentales.

Para ello partió de la suposición de que cada uno de los puntos del medio, perturbado al ser alcanzado por el frente de onda, actúa como un nuevo foco de perturbación que emite ondas esféricas con la misma velocidad, frecuencia y longitud de onda que la onda inicial. Todos los puntos del frente de onda emiten simultáneamente dichas ondas (denominadas ondas secundarias o elementales).

El principio de Huygens establece que la envolvente de las ondas secundarias emitidas desde el frente de onda constituye el nuevo frente de onda. En todos los puntos que no están en un determinado instante sobre esa envolvente se produce una interferencia destructiva entre las distintas ondas secundarias que hace que su efecto se cancele. De esta forma podemos construir un frente de ondas conociendo el mismo frente en un instante anterior.

1.11.2. Reflexión y refracción en una superficie plana de separación entre dos medios.

Cuando las ondas que se propagan en un medio homogéneo llegan a una superficie donde las propiedades del medio cambian de forma abrupta, se producen los fenómenos de reflexión y refracción (o transmisión) de la onda. La onda

reflejada es la que se propaga desde la superficie de separación por el mismo medio ① que la onda incidente mientras que la onda refractada es la que se propaga por el segundo medio.

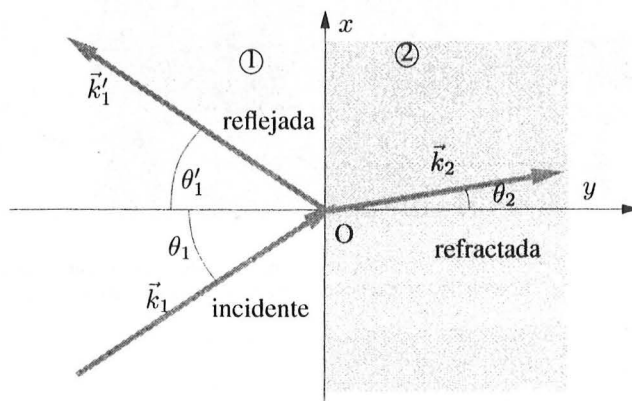


Figura 1-16 Reflexión y refracción en la superficie plana de separación entre dos medios ① y ②.

Consideremos la siguiente situación. En el fluido ① una onda plana de frecuencia angular ω y número de onda $k_1 = \omega/c_1$ incide sobre la superficie formando un ángulo θ_1 con la normal a la misma. Consideremos al plano de la figura, que es el plano de incidencia de la onda incidente. La onda reflejada, si existe, tendrá la misma frecuencia y por tanto un vector de onda de la misma magnitud que la onda incidente. Denominamos *ángulo de incidencia* al comprendido entre la dirección de propagación de la onda incidente y la normal a la superficie de separación entre dos medios en el punto de incidencia. Denominamos *ángulo de reflexión* al comprendido entre la dirección de propagación de la onda reflejada y la normal, y *ángulo de refracción* al formado por la dirección de la onda refractada y la normal.

Se puede ver que, para la denominada *reflexión regular*, el ángulo de incidencia debe ser igual al de reflexión, y ambos rayos deben estar en el mismo plano,

$$\theta'_1 = \theta_1. \quad (1-133)$$

Hemos hablado de reflexión regular ya que en la reflexión hay que tener en cuenta la relación entre la longitud de onda λ de la onda incidente y el tamaño de las irregularidades de la superficie. Si la longitud de onda de la onda incidente es menor que el tamaño de las imperfecciones se tiene reflexión regular y la onda se refleja con un ángulo de reflexión igual al de incidencia y poca distorsión. Si por el contrario la longitud de onda de la onda incidente es del orden o mayor que el tamaño de las irregularidades de la superficie se tiene la denominada *reflexión difusa*, en la que se produce reflexión en un rango más amplio de ángulos y distorsión de la onda reflejada respecto de la incidente.

Las leyes de la reflexión son muy importantes para el estudio de la acústica de locales, y a menudo se colocan las superficies de forma que las reflexiones intensifiquen el sonido en ciertas zonas. Obviamente, la menor dimensión de estas superficies, a las que se denomina tornavoces, debe ser mayor que la longitud de onda del sonido incidente para que no se produzca distorsión del mismo.

También puede verse que para la refracción debe cumplirse la relación

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2,$$

también con ambos rayos en el mismo plano. Esta relación se escribe habitualmente en la forma

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1}{c_2} \quad (1-134)$$

Esta relación se conoce como *ley de Snell*, especialmente cuando se trabaja con luz. En ese caso se dice que el coeficiente c_1/c_2 es el *índice de refracción* del segundo medio respecto del primero. En Óptica se suele utilizar el término índice de refracción de un medio de forma absoluta, refiriéndolo siempre a la velocidad de propagación de la luz en el vacío, $n = c/c_{\text{medio}}$. Dependiendo de la velocidad de propagación de la onda en ambos medios, el ángulo de refracción será más o menos próximo a la normal que el ángulo de incidencia.

Como los medios por los que se propaga una onda no son en general completamente homogéneos, la refracción es un fenómeno muy frecuente. A causa de esta inhomogeneidad las propiedades del medio cambian de un punto a otro y por

tanto la velocidad de propagación de las ondas en ellos. Por ejemplo, la velocidad de propagación del sonido en el aire cambia de un punto a otro debido a que su temperatura no es uniforme y por tanto se produce refracción. Así, en un día soleado las capas de aire próximas a la superficie terrestre se encuentran más calientes que las más altas y por tanto la velocidad del sonido, que aumenta con la temperatura, es mayor en las capas bajas que en las altas. Ello da lugar a que el sonido, como consecuencia de la refracción, se desvíe hacia arriba. En estas condiciones, la comunicación entre dos personas suficientemente separadas se ve dificultada. Por las noches tiene lugar el fenómeno contrario, ya que la Tierra se enfría más rápidamente que el aire.

La refracción de la luz es la causa de que el Sol parezca más grande al amanecer que más tarde. El aire que está cerca de la superficie terrestre es más denso que el estrato de aire superior, y así sucesivamente, hasta que la capa de aire desaparece a unos 400 kilómetros. En estas condiciones, la luz emitida por el borde superior del Sol atraviesa la atmósfera con un ángulo distinto que la luz del borde inferior. Esto da lugar a dos ángulos de difracción divergentes, que producen la ilusión óptica que nos hace creer que el Sol es más grande. La refracción es también la causa de que los cuerpos sumergidos en agua tengan un tamaño aparente distinto del real.

1.11.3. Difracción.

El fenómeno de la difracción se presenta siempre que una onda se encuentra con un obstáculo, o una abertura, de dimensiones comparables o menores que su longitud de onda. El obstáculo puede ser una abertura, un muro o en general cualquier elemento que bloquee una parte del frente de onda (Véase la figura 1-17).

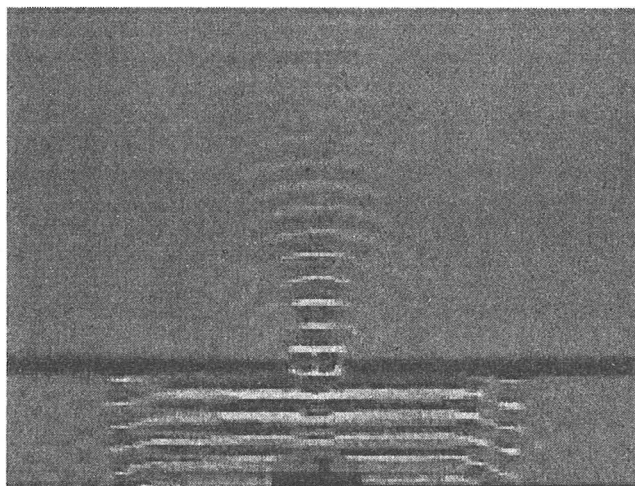


Figura 1-17 Difracción de ondas en el agua a través de una rendija.

En estas condiciones, la propagación del movimiento ondulatorio es rectilínea únicamente en la dirección no afectada por el obstáculo, pero aparece una propagación no rectilínea desde las direcciones correspondientes al borde del obstáculo, con una intensidad que depende de la dirección considerada. Hay que destacar que la magnitud de este efecto depende de la relación entre las dimensiones del obstáculo y la longitud de onda de la onda incidente. Si por ejemplo, estrechamos la abertura, la difracción se hace más marcada, los máximos laterales se separan del máximo central en forma de abanico, mientras que si ensanchamos la abertura, los máximos laterales se cierran sobre el centro y el efecto de la difracción va haciéndose progresivamente menor y la propagación a través de la abertura cada vez más rectilínea. Cuando el diámetro de la abertura es muy grande en comparación con la longitud de onda prácticamente no hay difracción y la propagación es esencialmente rectilínea.

Podemos entender la difracción a partir del principio de Huygens. Así, los bordes del obstáculo actuarían como origen de ondas secundarias. Estas ondas secundarias se propagan en todas las direcciones y dan la impresión de que la onda incidente ha rodeado el obstáculo.

La difracción de las ondas sonoras permite que en determinadas ocasiones un sonido se oiga aunque el receptor no esté en línea recta respecto del emisor (y no haya reflexiones), a causa de obstáculos en el camino de la onda sonora. Para un obstáculo dado cuanto mayor sea la longitud de onda del sonido mayor será el efecto de la difracción y cuanto menor sea

ésta menor será el efecto de la difracción. Esto hace que, por ejemplo, las ondas sonoras de longitud de onda alta (sonidos agudos) sean más propensas a producir *sombra acústica* que las de baja longitud de onda (sonidos graves).

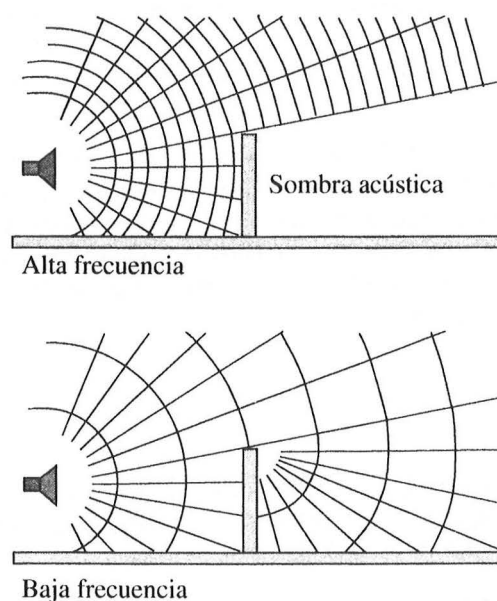


Figura 1-18 Difracción para altas y bajas frecuencias. Sombra acústica.

Es importante tener en cuenta estos efectos a la hora de diseñar barreras acústicas, ya que a bajas frecuencias, tendrá lugar más difracción en los bordes de la barrera, con una menor sombra acústica y por tanto, con un peor apantallamiento por parte de la barrera. Por el contrario a altas frecuencias la difracción será menor y el apantallamiento mejor.

Las ondas electromagnéticas visibles también experimentan los fenómenos de difracción. Sin embargo, como sus longitudes de onda son muy pequeñas (400 nm a 700 nm, para el espectro visible), los efectos de difracción sólo serán apreciables en obstáculos y aberturas de dimensiones muy pequeñas.

Sin embargo, el efecto de la difracción es apreciable en otras zonas del espectro. Por ejemplo, las ondas de radio en las frecuencias correspondientes a la denominada onda media (AM) tienen una longitud de onda grande comparada con el tamaño de la mayor parte de los obstáculos que encuentran en su camino, por lo que se produce difracción con cierta facilidad alrededor de muchos edificios y alcanzan lugares que no alcanzan ondas de radio de longitud de onda más corta.

Las ondas de radio en frecuencia modulada (FM) tienen una longitud de onda menor y por tanto la difracción con los edificios es menor, por lo que se reciben con menor calidad. Por ello en muchos lugares se recibe mejor la onda media que la frecuencia modulada. Este efecto es aún más marcado para las ondas de televisión cuya longitud de onda es mucho menor, por lo que es necesario poner las antenas en los tejados. En este caso el efecto de la difracción es positivo para la recepción.

El efecto de la difracción también limita la resolución máxima de la instrumentación que utiliza reflexión para observar objetos pequeños, ya que se producirá reflexión regular únicamente si la longitud de onda de la onda utilizada es pequeña comparada con el tamaño del objeto. En caso contrario se producirá reflexión difusa (causada por la difracción) que impide resolver detalles de tamaño menor que la longitud de onda de la onda utilizada. Por ejemplo, no es posible, utilizando sonido audible, resolver algo con una precisión mayor de ± 2 cm ni observar átomos con luz visible.

Capítulo 2

Ondas estacionarias

2.1. Ondas estacionarias en una cuerda

2.1.1. Condiciones en los extremos de una cuerda

Consideremos ahora la siguiente situación, un tren de ondas avanza a lo largo de una cuerda tensa y llega al extremo de la misma. Cada sacudida que llega al soporte ejerce una fuerza sobre éste, de forma que la reacción a esta fuerza actúa sobre la cuerda y da lugar a una sacudida reflejada que se propaga en sentido contrario. Sin embargo, esta sacudida reflejada debe siempre satisfacer una condición evidente, si el extremo está fijo la sacudida reflejada debe ser tal que éste debe permanecer en reposo.

También puede darse el caso de que el extremo esté libre. En este caso, la sacudida que llega continúa propagándose, pero en sentido contrario, dando lugar también a una onda reflejada. Se denominan condiciones en los extremos a las condiciones que deben satisfacerse en los extremos de la cuerda.

Cuando se estudia la propagación de esta perturbación en el tiempo, y en particular cómo se produce la reflexión en el extremo se ve que, cuando el extremo está fijo la sacudida se refleja, invirtiéndose los valores de la elongación y de la velocidad. Por el contrario, cuando la reflexión tiene lugar en un extremo libre se invierte la dirección de la velocidad, pero no cambia la de la elongación.

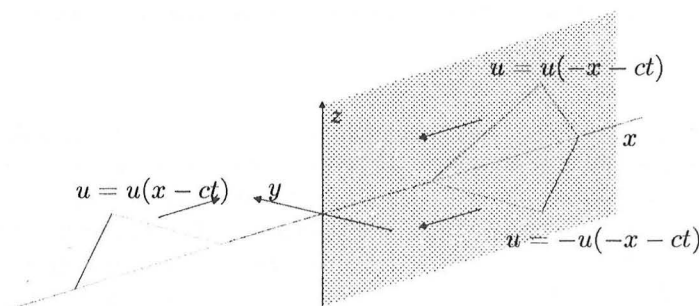


Figura 2-1 En la figura se muestra la perturbación real y las perturbaciones virtuales con que se compondrá para satisfacer las condiciones en el extremo.

Se puede considerar este proceso como si ocurriera de la siguiente forma. Supongamos que la cuerda se prolongara indefinidamente más allá del extremo, de forma que la perturbación continuara en la parte imaginaria de la cuerda, como si no hubiera condición alguna en el extremo. Al mismo tiempo, consideremos que una perturbación virtual, que ha estado propagándose en la parte imaginaria, se mueve hacia la parte real y forma la perturbación reflejada. Las características de esta perturbación virtual dependen de si se tiene un extremo fijo o libre, mostrándose los dos casos en la figura 2-1. Siempre podemos imaginar estas reflexiones suponiendo que la onda real y la onda virtual que sale desde el otro lado del extremo.

Así, se tiene en el eje negativo de las x una perturbación real que se desplaza hacia el origen de coordenadas, del tipo $u(x - ct)$ como corresponde a una onda que se desplaza hacia la derecha. Consideremos en primer lugar la perturbación virtual inferior, correspondiente al caso de extremo fijo. Esta perturbación es la imagen de la perturbación original pero reflejada dos veces, una primera respecto del plano yz y una segunda respecto del plano yx . Matemáticamente, esto implicaría una inversión de la dirección x , es decir $x \rightarrow -x$ y un cambio de signo de la perturbación, quedando ésta como $-u(-x - ct)$. Esta función es del tipo $u(x + ct)$ (ya que es $-u(-(x + ct))$) correspondiendo por tanto a una perturbación que se desplaza hacia la izquierda con velocidad c . La perturbación virtual superior, correspondiente al caso de extremo libre, es simplemente la imagen de la perturbación original reflejada respecto del plano yz . Matemáticamente se obtendría igual que la perturbación virtual anterior, pero sin cambiar de signo la perturbación, únicamente invirtiendo el signo de la coordenada x . Así, sería una perturbación del tipo $u(-x - ct)$ que corresponde a una onda que se desplaza hacia la izquierda con velocidad c (igual que antes, es $u(-(x + ct))$).

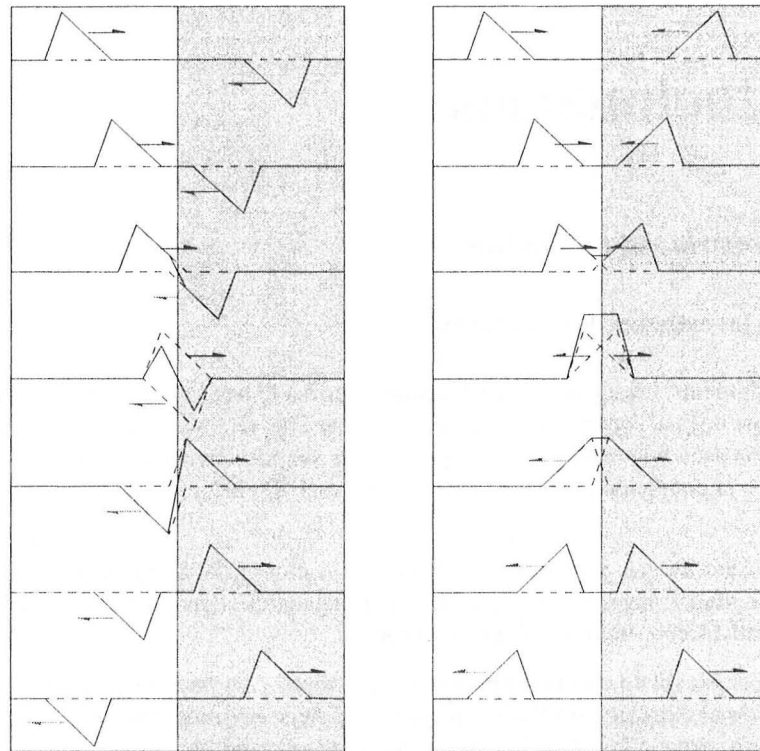


Figura 2-2 Reflexión de una perturbación en un extremo fijo (izquierda) y en un extremo libre (derecha). Las perturbaciones real y virtual se muestran con línea de trazos mientras que la perturbación resultante (superposición de las dos anteriores) se muestra con trazo continuo. La zona virtual está marcada en gris.

En un instante cualquiera, la perturbación total en un punto se obtiene como la suma de los valores en ese punto de las perturbaciones original y reflejada. Este hecho se conoce como principio de superposición y es en general cierto siempre que las perturbaciones sean suficientemente pequeñas, y en el caso de elementos elásticos, que no se sobrepasen los límites elásticos. En la figura 2-2 se muestran las perturbaciones incidente, reflejada y total tanto para el caso de reflexión en un extremo fijo (parte izquierda de la figura) como para reflexión en un extremo libre (parte derecha de la figura). Como se ve en la figura, en el caso de reflexión en un extremo fijo las perturbaciones real y virtual se componen de forma que su suma, la perturbación resultante, es siempre nula en el extremo fijo.

2.1.2. Ondas estacionarias en una cuerda fija a un extremo

En vez de la propagación y reflexión de una perturbación aislada, consideremos ahora que ocurre cuando se tiene un tren de ondas armónicas que incide de forma continua sobre el extremo fijo de una cuerda. En este caso parece que en dicho extremo se produjera un tren continuo de ondas propagándose en el sentido contrario y siendo, en el rango de validez del principio de superposición, la perturbación resultante en cada punto la suma de las perturbaciones incidente y reflejada. En general denominaremos interferencia al efecto producido por distintos trenes de ondas que atraviesan simultáneamente una cierta región del espacio.

En este caso se tiene un comportamiento peculiar, ya que el aspecto de la perturbación resultante no muestra ondas recorriendo la cuerda en sentidos opuestos. En vez de eso, si la frecuencia es suficientemente grande, la cuerda aparece subdividida en un cierto número de segmentos. La forma de la cuerda sigue siendo la de una función armónica pero, mientras que en una onda armónica que se propaga la amplitud de la onda permanece constante según avanza la onda, aquí la onda resultante permanece fija en posición, mientras que la amplitud varía como consecuencia de la oscilación. Existen unos puntos denominados *nodos* que permanecen siempre en reposo, mientras que los puntos equidistantes entre dos nodos consecutivos tienen amplitud máxima (denominándose a estos puntos *vientres* o *antinodos*). Se denomina a la vibración resultante en este caso *onda estacionaria* u *onda confinada*, y su característica fundamental es que se trata de una onda que oscila, pero sin una propagación neta, aunque sea el resultado de la superposición de dos ondas viajeras.

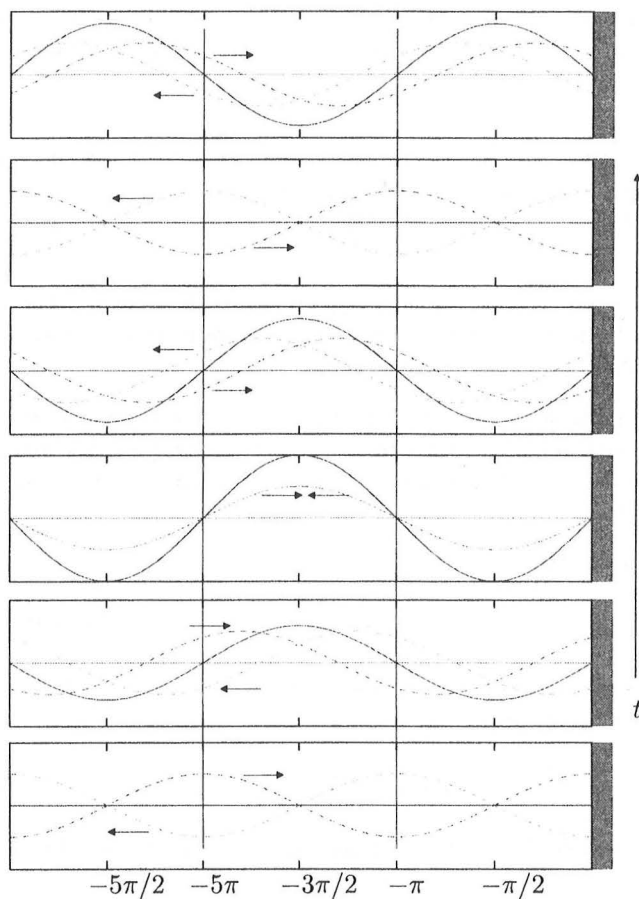


Figura 2-3 Onda estacionaria resultante de la superposición de dos ondas que se reflejan en un extremo fijo.

Estudiemos analíticamente estas ondas estacionarias. Para ello consideremos el siguiente tren de ondas,

$$u_i = u^0 \cos(kx - \omega t) = u^0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct)$$

que representa un tren de ondas armónicas incidente que se propaga hacia la derecha con velocidad c . Si el extremo derecho está fijo, la ecuación de la onda reflejada vendrá dada, de acuerdo con lo visto en la sección 2.1.1, por

$$u_r = -u^0 \cos(-kx - \omega t) = -u^0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (-x - ct)$$

que puede escribirse como

$$u_r = -u^0 \cos(kx + \omega t) = -u^0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x + ct)$$

La onda resultante vendrá dada por la superposición de u_i y u_r ,

$$u = u_i + u_r = u^0 [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)] = u^0 \left[\cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) - \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x + ct) \right]$$

Desarrollando los cosenos de la suma y diferencia de dos ángulos se obtiene

$$u = 2u^0 \sin kx \sin \omega t = 2u^0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \sin 2\pi \nu t \quad (2-1)$$

En un instante de tiempo genérico (en el que $\sin \omega t$ no sea nulo), la forma (2-1) de la onda resultante en el espacio es una senoide $[2u^0 \sin \omega t] \sin kx$ cuya amplitud $2u^0 \sin \omega t$ varía a su vez de forma sinusoidal con el tiempo. Para instantes de tiempo en los que se satisface la relación

$$\omega t = 2\pi \nu t = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

la amplitud es nula y la cuerda permanece recta. En estos instantes de tiempo las ondas incidente y reflejada están en oposición de fase y ambas ondas se cancelan. Por el contrario, para instantes de tiempo en los que se cumpla la relación

$$\omega t = 2\pi\nu t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$$

la amplitud tiene un máximo de valor $2u^0$, que es la suma de las amplitudes de las ondas que interfieren. En esos instantes de tiempo, las ondas incidente y reflejada están en fase y dan por tanto, la máxima amplitud resultante. En los demás instantes, la amplitud tiene valores intermedios que varían de forma sinusoidal con el tiempo con una frecuencia angular ω .

¿Cómo oscila cada punto de la cuerda y cómo varía de un punto a otro de la cuerda el desplazamiento causado por la onda en un instante de tiempo dado? A partir de la ecuación (2-1) podemos representar esta oscilación de cada punto como un movimiento armónico de amplitud $2u^0 \sin kx$ y frecuencia ν .

Así, a partir de la ecuación (2-1) (igual que a partir de la figura 2-3), se ve claramente que cada punto de la cuerda efectúa un movimiento armónico simple de la misma frecuencia ν para todos los puntos, pero con una amplitud $2u^0 \sin kx$ que depende de la posición del punto. Al contrario de lo que ocurre con una onda que se propaga, todos los puntos situados entre dos nodos oscilan en fase.

Para valores de x que cumplen la relación

$$-kx = -\frac{2\pi x}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi, \dots = n\pi = (2n)\pi/2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

la amplitud de la oscilación es nula. Estos puntos permanecen siempre en reposo y son por tanto *nodos*. Por el contrario en los puntos donde se satisface la relación

$$-kx = -\frac{2\pi x}{\lambda} = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

la amplitud alcanza su valor máximo $2u^0$, siendo por tanto *vientres* o *antinodos*. Los nodos se encontrarán en aquellos puntos en los que se cumpla

$$-x = 0, \lambda/2, 2\lambda/2, \dots = n\frac{\lambda}{2} = (2n)\lambda/4 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2-2)$$

y los vientos en aquéllos en los que se cumpla

$$-x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2-3)$$

Los nodos consecutivos están separados entre sí en media longitud de onda, lo mismo que los vientos consecutivos.

Todo esto se muestra de forma gráfica en la figura 2-3. Entre dos nodos sucesivos cualesquiera cada punto oscila sinusoidalmente con la misma frecuencia, pero el movimiento resultante no se propaga a otros puntos, sino que permanece fijo en el espacio. Ésta es la característica de los *modos de vibración*. Si nos encontramos con un movimiento en el que cada punto del móvil se mueve sinusoidalmente en torno a su posición de equilibrio con la misma frecuencia (aunque cada punto lo haga con distinta amplitud) tenemos un modo de vibración.

2.1.3. Ondas estacionarias en una cuerda fija a ambos extremos

Consideremos ahora el caso más habitual, una cuerda fija que se encuentra sujeta a ambos extremos. Un tren de ondas armónicas se refleja en dichos extremos y al estar ambos fijos deben ser los dos nodos, con un desplazamiento nulo de la cuerda en cada uno de esos extremos. Como los nodos consecutivos están separados entre sí por media longitud de onda, si la longitud de onda de las ondas armónicas es λ , para que se cumpla la condición de desplazamiento nulo en los nodos, la longitud de la cuerda debe ser un número entero de semilongitudes de onda,

$$L = \frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \dots = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2-4)$$

Dicho de otra forma, si consideramos una cuerda de una determinada longitud L , sólo pueden producirse en la cuerda ondas estacionarias de determinadas frecuencias, aquéllas cuyas longitudes de onda son $2L, 2L/2, 2L/3, \dots$, es decir,

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad \text{con } (n = 1, 2, \dots) \quad (2-5)$$

y distancias entre nodos $L, L/2, L/3, \dots$. Como la velocidad de propagación es la misma para todas las frecuencias, las permitidas serán

$$\nu = \frac{c}{2L}, 2\frac{c}{2L}, 3\frac{c}{2L}, \dots = n\frac{c}{2L} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2-6)$$

Al igual que en la descomposición de Fourier, se denomina a la frecuencia más baja $\nu_0 = c/2L$ frecuencia fundamental o armónico principal mientras que a las frecuencias superiores se les denomina armónicos superiores (segundo armónico $2\nu_0$, tercer armónico $3\nu_0$, etc.).

Estas frecuencias son características del sistema oscilante y de la naturaleza de los límites. En general cualquiera de los movimientos posibles de la cuerda puede analizarse considerando la superposición de ondas estacionarias de distintas frecuencias, o dicho de otra forma, de una serie de modos de vibración, por supuesto siempre que estemos considerando un sistema lineal en el que es aplicable el principio de superposición.

Hay una diferencia importante a resaltar entre un sistema de un muelle con un peso y una cuerda vibrante. Mientras que el sistema formado por el muelle y el peso tiene una única frecuencia angular natural de vibración dada por $\omega_0^2 = k_r/m$, la cuerda vibrante tiene un número infinito de frecuencias propias, la fundamental y todos los armónicos. Si desplazamos de su posición de equilibrio un peso sujeto por un resorte este sistema oscilará a una única frecuencia de vibración. Si deformamos inicialmente una cuerda de modo que su forma coincida con uno de los posibles armónicos, cuando se libere la cuerda, ésta vibrará con la frecuencia correspondiente a dicho armónico en particular.

¿Qué ocurrirá cuando la forma inicial de la cuerda no coincide con la de ningún armónico? Éste es el caso que se tiene cuando se golpea o pulsa una cuerda de forma arbitraria. En este caso, la perturbación inicial puede expresarse mediante un desarrollo de Fourier en función de ondas armónicas de longitudes de onda coincidentes con las de los posibles armónicos de la cuerda. De esta forma, la vibración resultante es una mezcla de ondas estacionarias, cada una de ellas correspondiente a una componente de Fourier de la perturbación inicial. Por ejemplo, al golpear una cuerda de un piano, estarán presentes la frecuencia fundamental y los distintos sobretonos.

Por la misma razón, hay una diferencia adicional entre el muelle y la cuerda vibrante en relación a la resonancia. Mientras que el sistema peso-muelle puede entrar en resonancia únicamente a su frecuencia fundamental, una cuerda vibrante puede entrar en resonancia en cualquiera de sus armónicos. Para un sólido hay aún más posibilidades, ya que además de ondas estacionarias transversales como las que hemos visto en el caso de una cuerda, también puede haber ondas estacionarias transversales de torsión como las que aparecieron en el puente de Tacoma Narrows que se muestra en la figura 2-4, así como ondas estacionarias longitudinales.

Las amplitudes de los distintos armónicos dependen de la forma particular en que se haya pulsado la cuerda inicialmente. El tono del sonido principal emitido por la cuerda está determinado principalmente por la frecuencia fundamental mientras que el timbre depende del número de armónicos que se hayan excitado y de sus amplitudes.

Si se tuviera uno de los extremos de la cuerda libre, éste sería un vientre en vez de un nodo.

Como hemos visto, la frecuencia fundamental de la cuerda vibrante tensa viene dada por $\nu_0 = c/2L$, donde según se vio en (1-14) $c = \sqrt{\mathcal{F}/\rho_l}$ con $\mathcal{F}$ la fuerza tensora y ρ_l la densidad lineal de masa. Así, la frecuencia fundamental de una cuerda vibrante de densidad lineal de masa ρ_l tensa con una fuerza $\mathcal{F}$ es

$$\nu_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{\rho_l}} \quad (2-7)$$

En los instrumentos de cuerda se encuentran excelentes ejemplos de aplicación de esta ecuación. Así, éstos se afinan variando la fuerza tensora $\mathcal{F}$, de forma que un aumento de $\mathcal{F}$ aumenta la frecuencia y viceversa. Asimismo, cuanto mayor es la longitud de la cuerda, menor es la frecuencia. Por ejemplo, en un piano, las cuerdas correspondientes a los tonos altos tienen menor longitud que las cuerdas correspondientes a los tonos bajos, lo mismo que las cuerdas del violonchelo son más largas que las cuerdas de un violín y por tanto dan un tono más grave. Para obtener una baja frecuencia sin necesidad de tener $\mathcal{F}$ muy bajas o longitudes muy largas, tanto en los pianos como en las guitarras se recurre a forrar las cuerdas que dan las notas bajas con un hilo metálico, o a utilizar cuerdas más gruesas.

2.2. Ondas estacionarias en una columna de aire

Hemos estudiado en temas anteriores la propagación de una onda de presión a lo largo del gas contenido en un tubo. Si éste tiene longitud finita, las ondas se reflejarán en los extremos del tubo de la misma forma que lo hacen las ondas transversales

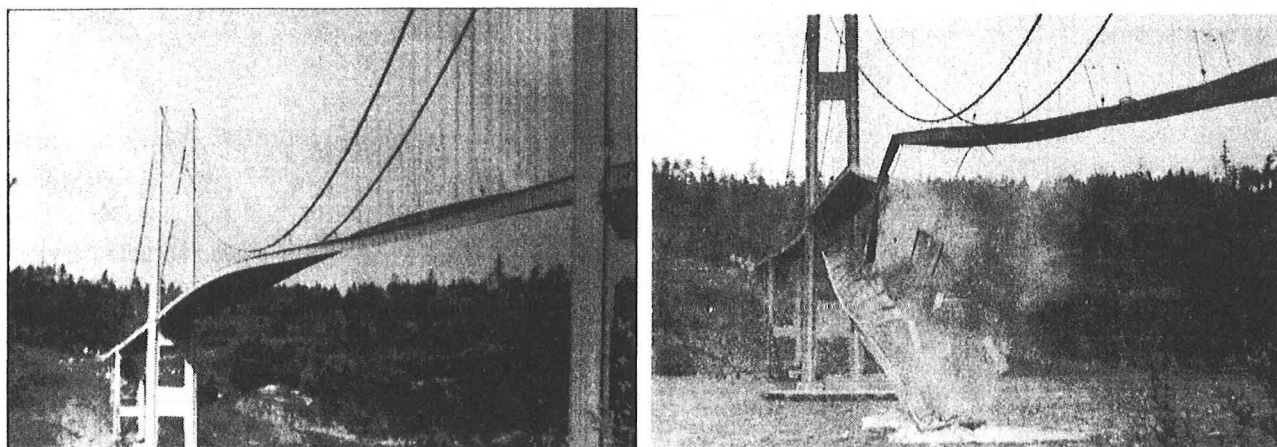


Figura 2-4 Un viento persistente excitó en el puente de Tacoma Narrows una onda estacionaria de torsión como la que se ve en la figura superior. Esta onda estacionaria entró en resonancia con el viento, provocando finalmente la rotura del puente el 7 de noviembre de 1940, apenas 4 meses después de su inauguración. La amplitud de la onda estacionaria generada fue de unos 4,3 m, la frecuencia de 14 ciclos por minuto y su longitud de 853 m, siendo la densidad lineal de masa del puente de 6700 kg/m, llegando a acumular una energía de 4×10^7 J. Ésta se liberó rápidamente durante la rotura llegando a ser la potencia de 9×10^6 W durante los segundos en los que se produjo el colapso del puente. (Imágenes de dominio público de la *Stillman Fires Collection: Tacoma Fire Dept.*)

que se propagan en una cuerda tensa cuando llegan a sus extremos. Así, tendremos también ondas estacionarias y el tubo con aire tendrá también un número infinito de frecuencias propias.

Los tubos sonoros pueden ser de dos tipos, abiertos y cerrados. Son abiertos si tienen dos o más orificios y cerrados si tienen un único orificio. La mayoría de los instrumentos musicales de aire están contruidos con tubos abiertos. Solo unos pocos instrumentos como algunos tubos de órgano utilizan tubos cerrados.

Si el extremo en el que se produce la reflexión es cerrado, el desplazamiento longitudinal de las partículas en dicho extremo debe ser nulo y por tanto el extremo cerrado corresponde a un nodo. Ahora bien, ésto corresponde a un punto de variación máxima de presión, es decir a un vientre de presión, como se aprecia en la figura 2-5.

Cuando el extremo del tubo está abierto las cosas son más complicadas y dependerán de la relación entre el diámetro del tubo y la longitud de onda de la perturbación. Cuando el tubo es estrecho comparado con la longitud de onda de la onda que se propaga en el mismo, como ocurre con la mayor parte de los instrumentos musicales, el extremo abierto se mantiene a la presión atmosférica y por tanto es un nodo de presión y un vientre de elongación (Un tratamiento riguroso muestra que, en realidad, el nodo está ligeramente fuera del tubo, a unas seis décimas de su radio).

De esta forma, las ondas longitudinales de presión en tubo se reflejan en los extremos del mismo, abierto o cerrado, del mismo modo que las ondas estacionarias en una cuerda tensa lo hacían en los extremos fijo o libre.

El efecto de los agujeros intermedios en un instrumento de viento es actuar como un extremo abierto y dividir la columna de aire en segmentos, produciéndose en cada uno de ellos una frecuencia propia. Así, tapando unos u otros agujeros, se tiene un nodo de presión (y un vientre de elongación) en cada agujero destapado, de forma parecida a lo que ocurre con el nodo de desplazamiento que aparece al pisar con el dedo la cuerda de un instrumento de cuerda. En general, en un instrumento de aire la longitud efectiva de la columna está menos definida que la longitud de una cuerda tensa fija por sus extremos.

La excitación de la columna de aire se produce mediante una embocadura, de distintas formas según los instrumentos. Sin una embocadura adecuada, una corriente de aire proyectada a través de un estrecho canal tendería a romperse a su salida formando turbulencias. Sin embargo, si dicha corriente de aire se hace chocar contra una arista más o menos afilada (bisel en el caso de la flauta) o se hace vibrar una lengüeta como en el caso de un clarinete, en vez de turbulencias se tienen oscilaciones periódicas y el sistema corriente-vibrador se convierte en un excitador. Así, la misión de esta embocadura es transmitir la vibración de la misma al aire que se encuentra en el tubo y de todas las frecuencias que ésta comunica las únicas frecuencias que sobreviven en la columna de aire son aquéllas que coinciden con la del armónico fundamental y los armónicos superiores, produciéndose resonancia en éstas. Para que se efectúe transmisión de la vibración la abertura en la que se encuentra la embocadura no puede ser un nodo de desplazamiento, pero no hace falta que sea un vientre sino que el punto de excitación puede estar en un lugar intermedio. Tampoco es necesario que las aberturas del tubo coincidan con los extremos del tubo, que pueden estar cerrados y tener el tubo varias aberturas a lo largo del mismo.

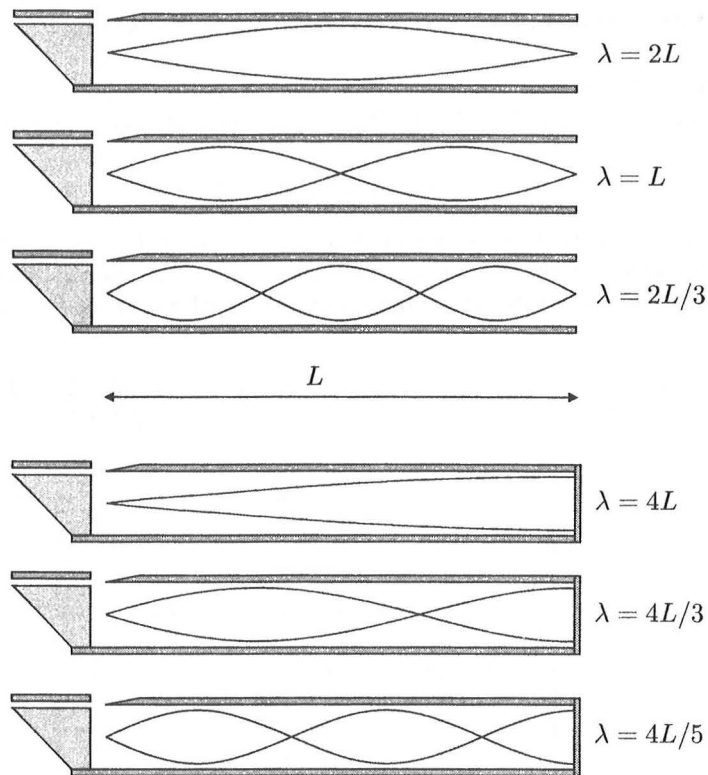


Figura 2-5 Diagramas de varias ondas estacionarias en el aire contenido en un tubo abierto o cerrado. En la figura se representa la envolvente de la onda de presión. Cada uno de los nodos de la presión correspondería a un vientre de desplazamiento y cada uno de sus vientres a un nodo de desplazamiento.

En la figura 2-5 se muestran la frecuencia fundamental y los dos primeros armónicos en tubos abiertos y cerrados, señalándose la envolvente de las ondas de presión en cada caso. Como se ve, para una misma longitud, la frecuencia fundamental de un tubo abierto es doble que la de un tubo cerrado. También se observa que las frecuencias de los armónicos para un tubo abierto van como 2, 3, 4 veces la frecuencia fundamental, mientras que los armónicos de un tubo cerrado van como 3, 5, 7 veces la fundamental. Así, en las vibraciones en un tubo abierto están presentes todos los armónicos mientras que en un tubo cerrado sólo lo están los impares y por tanto el timbre de ambos será distinto, aunque se hayan construido para que tengan la misma frecuencia fundamental.

La transmisión de las vibraciones a la columna de gas también puede hacerse a través de un extremo móvil como en el tubo de Kundt. Éste consiste en un tubo provisto de una válvula para la entrada de gas, cerrado en sus extremos por dos émbolos, uno de ellos ajustado a un dispositivo vibrador (que puede ser simplemente el frotamiento de una varilla ajustada al mismo) y otro de ellos de posición ajustable. Cuando se espolvorea en el interior del tubo un polvo fino y se excita la vibración del primer émbolo, ésta se transmite al gas y ajustando convenientemente la distancia entre los émbolos se seleccionan las ondas estacionarias producidas, que se pueden apreciar mediante los montones que forma el polvo. Cada montón representa un nodo de desplazamiento, ya que el polvo ha sido desplazado de todos los demás lugares en los que el gas se movía al nodo, donde no lo hace. La distancia entre dos nodos sucesivos dará la mitad de la longitud de onda del modo de vibración.

2.3. Ondas estacionarias en una membrana tensa

Analizaremos ahora las ondas estacionarias que se forman en una superficie, con sus correspondientes modos normales. Para ello utilizaremos los resultados que obtuvimos en la sección 1.5 para una membrana tensa y particularizaremos a dos casos, el de una membrana rectangular y el de una membrana circular, ambas fijas en sus bordes.

2.3.1. Ondas estacionarias en una membrana rectangular fija en sus bordes

Como sugiere la simetría del problema, partiremos de la solución (2-16) e imponemos las condiciones de contorno en los límites de la membrana, $u = 0$ para $[x = 0, a]$ y $[y = 0, b]$ si la membrana tiene dimensiones $a \times b$. Una solución del tipo

$$u(x, y, t) = A \sin k_x x \sin k_y y e^{i(\omega t - \alpha)} \quad (2-8)$$

se hace 0 para $x = 0$ y $y = 0$, mientras que si se cumple además que tanto $k_x a$ como $k_y b$ son un número entero de veces π la condición de desplazamiento nulo también se satisface en los otros dos bordes. Así, si $k_x a = l\pi$ y $k_y b = m\pi$, con $l, m = 1, 2, 3, \dots$ las frecuencias de los distintos modos normales de vibración vendrán dadas por

$$k = \frac{\omega}{c} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \Rightarrow \omega(l, m) = \pi c \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}. \quad (2-9)$$

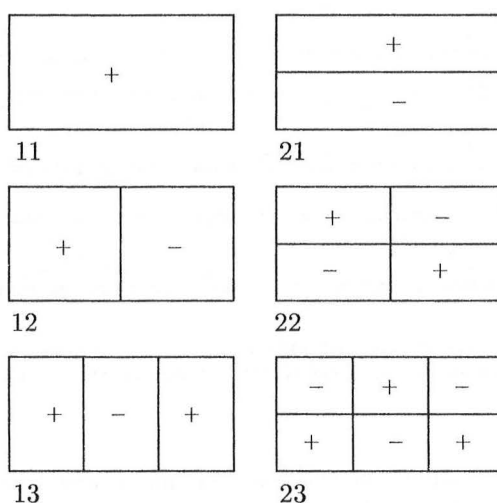


Figura 2-6 Modos de vibración de una membrana rectangular con una dimensión el doble de la otra ($b = 2a$). Para cada modo se muestra el par (l, m) correspondiente. Los signos $+$ y $-$ muestran la fase relativa del movimiento de las distintas partes de la membrana.

La frecuencia fundamental correspondería a $m = l = 1$ y los sobretonos con $m = l$ serán armónicos de la frecuencia fundamental, pero en general aquéllos con $m \neq l$ no lo serán. En el caso más general, ni unas frecuencias serán múltiplos de las otras ni serán múltiplos de ningún número salvo el caso especial mencionado. Si a^2 y b^2 son incommensurables (es decir, a^2/b^2 no puede expresarse como el cociente de dos enteros), todas las frecuencias serán distintas. En caso contrario pueden existir dos o más frecuencias idénticas para diferentes pares de índices m, l ; se dice en este caso que se trata de *modos de vibración degenerados*. Para un modo de vibración, las *líneas nodales* en la membrana constan de dos conjuntos de rectas dirigidos cada uno de ellos según uno de los ejes coordenados, y dividen la membrana rectangular en $l \times m$ rectángulos.

La vibración más general de una membrana rectangular puede representarse como una superposición lineal de los distintos modos de vibración, en la forma

$$u(x, y, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{lm} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{i(\omega_{lm} t - \alpha_{lm})} \quad (2-10)$$

donde ω_{lm} y α_{lm} deben determinarse a partir de las características geométricas de la membrana y de las condiciones iniciales de cada problema concreto.

2.3.2. Ondas estacionarias en una membrana circular de radio R fija en sus bordes

Como vimos en la sección 1.5.3 si la membrana circular existe en el centro, no pueden aparecer las funciones de Bessel de segunda especie en la solución de la ecuación de ondas (1-23). Si el radio de la membrana es R , los modos normales

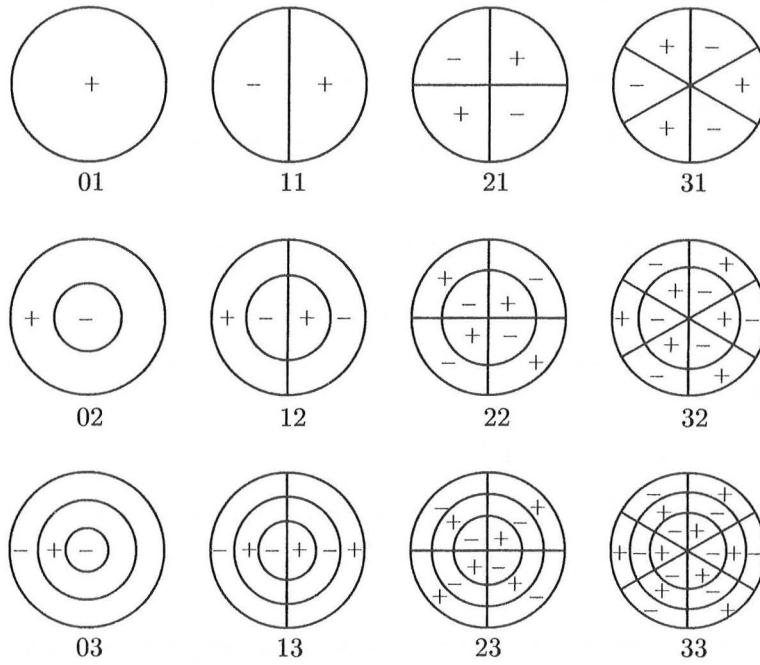


Figura 2-7 Modos de vibración en una membrana circular fija en su borde. Para cada modo se muestra el par (m, n) correspondiente. Los signos + y - muestran la fase relativa del movimiento de las distintas partes de la membrana.

de vibración deben corresponder a los valores de k que anulen la función de Bessel de primera especie $J_m(kR)$. Para cada uno de los ceros de la función de Bessel J_m , a los que denominaremos j_{mn} refiriéndonos al cero enésimo, existirá el correspondiente k y por tanto, los números de onda de las ondas posibles en la membrana deben cumplir

$$k_{mn}R = j_{mn} \quad (2-11)$$

y los modos normales de vibración han de ser de la forma

$$u_{mn}(r, \theta, t) = A_{mn} J_m(k_{mn}r) \cos(m\theta - \gamma_{mn}) e^{i(\omega_{mn}t - \alpha_{mn})} \quad (2-12)$$

con las frecuencias angulares naturales dadas por

$$\omega_{mn} = 2\pi\nu_{mn} = k_{mn}c = \frac{j_{mn}c}{R}. \quad (2-13)$$

El ángulo de fase azimutal γ_{mn} , que es una de las constantes que aparecen en esta solución, debe ser ajustado a partir de las condiciones iniciales, ya que determina las direcciones que pasan por el centro de la membrana a lo largo de las cuales se tendrán líneas nodales de desplazamiento nulo y esto depende claramente de las condiciones de la excitación inicial.

Por otra parte, si observamos cualquiera de las funciones de Bessel que aparecen en la figura 1-4, para el modo asociado al primer cero j_{m0} no habrá líneas circulares internas en las que los puntos de la membrana no oscilen, al no haber ceros dentro. Sin embargo, cuando analizamos los modos correspondientes a los siguientes ceros vemos que además de en el borde de la membrana tampoco habrá oscilación en los puntos de la membrana correspondientes a uno de los ceros interiores. Como estamos en el mismo modo en el cero exterior y en los interiores, debe cumplirse $k_{mn}R = j_{mn}$ para el cero exterior (que anula el desplazamiento en el borde de la membrana y caracteriza al modo) y $k_{mn}r_i = j_{mi}$ para cada uno de los ceros interiores que aparecen para cada nodo a una distancia r_i del centro de la membrana (con $i = 1, \dots, n-1$). Como se trata del mismo modo, k_{mn} es el mismo en ambos casos y las distancias r_i , que vienen dadas por

$$r_i = \frac{j_{mi}}{j_{mn}} R, \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2-14)$$

definen una serie de puntos a lo largo de una circunferencia en los que la elongación es nula para el modo (m, n) , a los que se denomina círculos nodales.

Así, para un modo genérico (m, n) en la membrana circular tendremos m líneas nodales radiales y n círculos nodales, incluyendo el borde de la membrana. La vibración real será una superposición de los distintos modos.

2.4. Ondas estacionarias de presión en una caja rectangular

Analicemos ahora las ondas estacionarias que se forman en un fluido contenido en una caja de paredes rectangulares de dimensiones $a \times b \times c$. Para ello obtendremos en primer lugar soluciones de la ecuación (1-73) mediante un método de separación de variables similar al utilizado en la sección 1.5.2, con la solución escrita como

$$\wp(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \quad (2-15)$$

que da una dependencia temporal similar a la ya obtenida para la ecuación (1-26),

$$T(t) = A_t e^{i(\omega t - \alpha_t)} \quad (2-17)$$

y soluciones para la parte espacial similares a las de la ecuación (1-28) pero con una constante de separación más (k_z), de forma que la solución es

$$\wp(x, y, z, t) = A e^{i(k_x x + k_y y + k_z z + \omega t - \alpha)} = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t - \alpha)} \quad (2-16)$$

con $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ el vector de onda y $\vec{r} = (x, y, z)$, siendo la relación entre las distintas constantes

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2-17)$$

Si recordamos que el desplazamiento $\vec{u}$ está relacionado con la presión mediante la ecuación (1-72) una onda como la anterior, con dependencia temporal en $\exp(i\omega t)$ da, después de una doble integración en t ,

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \vec{\nabla} \wp \quad (2-18)$$

ya que no aparecen términos convectivos (y así $d\vec{u}/dt = \partial\vec{u}/\partial t$). Como el desplazamiento debe anularse en las paredes de la caja, una solución de la forma[†]

$$\wp(x, y, z, t) = \wp_0 \cos k_x x \cos k_y y \cos k_z z e^{i(\omega t - \alpha)} \quad (2-19)$$

nos daría unas componentes del desplazamiento

$$u_x = -\frac{k_x \wp_0}{\rho_0 \omega^2} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z e^{i(\omega t - \alpha_x)} \quad (2-20a)$$

$$u_y = -\frac{k_y \wp_0}{\rho_0 \omega^2} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z e^{i(\omega t - \alpha_y)} \quad (2-20b)$$

$$u_z = -\frac{k_z \wp_0}{\rho_0 \omega^2} \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z e^{i(\omega t - \alpha_z)} \quad (2-20c)$$

que se hacen 0 para $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ y que también se anularán para $x = a$, $y = b$ y $z = c$ si k_x , k_y y k_z son de la forma

$$k_x a = \pi l \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2-21a)$$

$$k_y b = \pi m \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2-21b)$$

$$k_z c = \pi n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2-21c)$$

que nos da unos valores para las frecuencias angulares de cada uno de los modos

$$\omega(l, m, n) = \pi c \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2} \quad (2-22)$$

Obviamente al menos una de las l, m, n debe ser distinta de 0. En este caso tendremos $l - 1$ planos nodales perpendiculares al eje x en los que la componente x del desplazamiento es 0, $m - 1$ planos nodales perpendiculares al eje y y $n - 1$ planos nodales perpendiculares al eje z , que dividen el recinto para cada modo de vibración en $l \times m \times n$ elementos de volumen prismáticos. La vibración más general será superposición lineal de los distintos modos, en el rango de validez del principio de superposición.

[†] Al desarrollar la ecuación (2-15) aparecen otros sumandos que no satisfarán las condiciones de contorno, pero que también son solución de la ecuación de ondas sin condiciones en los límites.

Indice

1. Movimiento ondulatorio	1
1.1. Concepto de onda que se propaga. Frente de onda.	1
1.2. Descripción matemática de la propagación para una onda plana	1
1.3. La ecuación de ondas para las ondas planas en una dimensión	2
1.3.1. Análisis de Fourier de una onda periódica.	2
1.3.2. Propagación de una onda armónica plana	3
1.4. Propagación de ondas transversales en una cuerda tensa.	4
1.4.1. Ecuación de onda y velocidad de propagación	4
1.4.2. Energía de una cuerda vibrante	5
1.5. Propagación de ondas transversales en una membrana tensa	6
1.5.1. La ecuación de onda para una membrana tensa	7
1.5.2. Solución de ondas planas en coordenadas cartesianas	7
1.5.3. Solución en coordenadas polares planas	9
1.6. Propagación de ondas mecánicas en sólidos.	9
1.6.1. Propagación de una onda mecánica en un sólido elástico isotrópico e ilimitado.	10
1.6.2. Propagación de ondas elásticas longitudinales planas en una barra fina.	12
1.7. Propagación de ondas mecánicas en fluidos.	15
1.7.1. La ecuación de ondas para un fluido no viscoso	16
1.7.2. Energía de un fluido sometido a una onda de presión	17
1.7.3. Velocidad del sonido en los fluidos	17
1.7.4. Ondas planas longitudinales de presión en una columna de gas.	18
1.7.5. Ondas esféricas de presión en un fluido.	22
1.7.6. Ondas superficiales en un líquido.	24
1.8. Ondas electromagnéticas.	25
1.8.1. Ondas planas	25
1.8.2. Ondas planas armónicas	26
1.8.3. Energía de una onda electromagnética	27
1.8.4. Intensidad de una onda electromagnética	27
1.8.5. El vector de Poynting	27
1.9. Velocidad de grupo y velocidad de fase	28
1.10. El efecto Doppler	30
1.10.1. El efecto Doppler en una dimensión.	31
1.10.2. El efecto Doppler en el espacio	32
1.10.3. Ondas de choque	32
1.11. Reflexión, refracción y difracción de una onda	33
1.11.1. El principio de Huygens.	33
1.11.2. Reflexión y refracción en una superficie plana de separación entre dos medios.	33
1.11.3. Difracción.	35
2. Ondas estacionarias	37
2.1. Ondas estacionarias en una cuerda	37
2.1.1. Condiciones en los extremos de una cuerda	37
2.1.2. Ondas estacionarias en una cuerda fija a un extremo	38
2.1.3. Ondas estacionarias en una cuerda fija a ambos extremos	40
2.2. Ondas estacionarias en una columna de aire	41
2.3. Ondas estacionarias en una membrana tensa	43
2.3.1. Ondas estacionarias en una membrana rectangular fija en sus bordes	44
2.3.2. Ondas estacionarias en una membrana circular de radio R fija en sus bordes	44
2.4. Ondas estacionarias de presión en una caja rectangular	46
Referencias	48

Referencias

- [1] Tipler, P. A., *Física*, vol. 1. Reverté, Barcelona, 1992.
- [2] Alonso, M. y E. J. Finn, *Física*. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1995.
- [3] Feynmann, R. P., R. B. Leighton y M. Sands, *Mecánica, radiación y calor*, vol. 1 de *Física*. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1987.
- [4] Martín Domingo, A., *Vibraciones y Ondas I: Oscilaciones mecánicas*, vol. 244 de *Cuadernos de apoyo a la docencia*. Instituto Juan de Herrera, ETSAM, Madrid, 2007.
- [5] Crawford, Jr., F. S., *Ondas*, vol. 3 de *Berkeley Physics Course*. Reverté, Barcelona, 1984.
- [6] Elmore, W. C. y M. W. Heald, *Physics of waves*. Dover, N. York, 1985.
- [7] Kinsler, L. E., A. R. Frey, A. B. Coppers y J. V. Sanders, *Fundamentos de acústica*. Limusa, México, 1995.
- [8] Yavorski, B. M. y A. A. Detlaf, *Manual de Física*. Ed. Mir, Moscú, 1977.
- [9] Abramowitz, M. y I. A. Stegun (editores), *Handbook of mathematical functions*. Dover, Nueva York, 1972.
- [10] Spiegel, M. R., *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*. McGraw-Hill, México, 1970.
- [11] Strelkóv, S., *Mecánica*. Ed. Mir, Moscú, 1978.
- [12] Martín Domingo, A., *Apuntes de elasticidad*, vol. 13 de *Cuadernos de apoyo a la docencia*. Instituto Juan de Herrera, ETSAM, Madrid, 1998.

Índice alfabético

- A**
análisis de Fourier, 2
ángulo
 de incidencia, 34
 de reflexión, 34
 de refracción, 34
antinodos, 38, 40
armónico
 principal, 41
 superior, 41
- B**
belio, 21
Bessel
 ecuación de, 9
 funciones de primera especie, 9
 funciones de segunda especie, 9
- C**
círculo
 nodal, 45
coeficiente
 de compresibilidad, 17
 de Poisson, 11
compresibilidad
 coeficiente de, 17
 módulo de, 17
condensación, 16
condiciones
 de contorno, 44, 46
 en los extremos, 37
constante
 de atenuación del medio, 21, 24
- D**
D'Alembert, ecuación de, 2
deformación
 cúbica, 11
 unitaria
 de volumen, 11
densidad
 de energía, 15
 lineal, 5
 de energía promedio, 6
difracción, 35
dispersión, 28
 anómala, 28
 normal, 28
Doppler, efecto, 30
- E**
ecuación
 de Bessel, 9
 de D'Alembert, 2
 de Helmholtz, 9
 de ondas, 2
 de una onda electromagnética, 26
 para un fluido, 16
 para un sólido, 11
 para una barra fina, 14
 para una cuerda tensa, 5
 para una membrana tensa, 7
ecuaciones de Maxwell, 25
efecto Doppler, 30
extremo
 fijo, 37
 libre, 37
- F**
Fourier,
 análisis de, 2
 integral de, 3
 serie de, 3
frecuencia
 angular
 fundamental, 2
 angular de la onda, 4
 fundamental, 41
frente de onda, 1, 33
funciones
 de Bessel
 de primera especie, 9
 de segunda especie, 9
 de Neumann, 9
- H**
Helmholtz, ecuación de, 9
Hooke, ley de, 11
- I**
impedancia, 21
 acústica específica, 21
índice de refracción, 34
integral de Fourier, 3
intensidad de una onda, 15
interferencia, 38
- K**
Kundt, tubo de, 43
- L**
ley
 de Hooke, 11
 de Snell, 34
línea nodal, 44, 45
longitud
 de onda, 3, 8
- M**
Maxwell, ecuaciones de, 25
medio
 dispersivo, 28
 no dispersivo, 28
modo
 de vibración, 40
 degenerado, 44
módulo
 de compresibilidad, 17
 de compresibilidad, 16
 de elasticidad longitudinal, 11
 de rigidez, 11, 12
 de Young, 11, 13
movimiento
 ondulatorio, 2
- N**
neper, 21, 24
Neumann, funciones de, 9
nodos, 38, 40
número

de onda, 3, 8
 angular, 3
 espectroscópico, 3

O

onda

armónica, 2
 cilíndrica, 1
 circularmente polarizada, 27
 confinada, 38
 cuadrada, 3
 de choque, 32
 de Mach, 32
 electromagnética, 25
 elemental, 33
 esférica, 1
 estacionaria, 2, 38
 incidente, 34
 linealmente polarizada, 27
 longitudinal, 1
 periódica, 2
 plana, 1
 progresiva, 2
 reflejada, 34
 refractada, 34
 secundaria, 33
 transversal, 1

P

perfil de onda, 1

perturbación virtual, 37

plano

de incidencia, 34
 de oscilación, 12
 nodal, 46

Poisson, coeficiente de, 11

polarización, 12

circular, 27
 lineal, 27

potencia promedio, 6

principio

de Huygens, 33
 de superposición, 2, 38

R

reactancia acústica específica, 23

reflexión, 33

difusa, 34
 regular, 34

refracción, 33

resistencia acústica específica, 23

S

serie de Fourier, 3

sobretono

angular, 2

sombra acústica, 36

T

tensor

de deformaciones, 11
 de tensiones, 10

tímbre, 41

tono, 41

tornavoces, 34

transmisión, 33

tubo

abierto, 42
 cerrado, 42
 de Kundt, 43

V

vector

de onda, 8

de Poynting, 27

velocidad

de fase, 28

del paquete, 29

de grupo, 28–30

de la señal, 30

vientres, 38, 40

Y

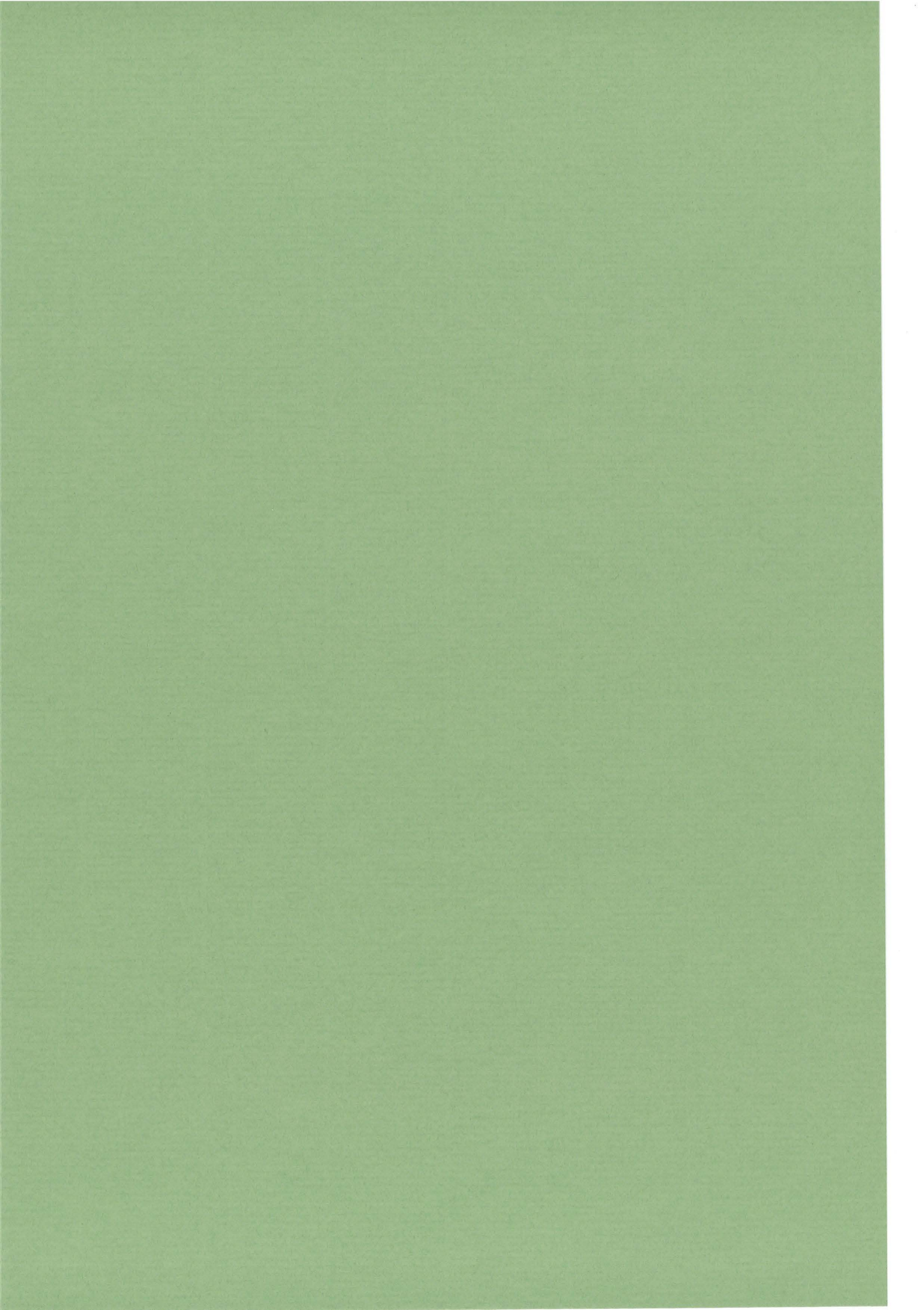
Young, módulo de, 11

NOTAS

NOTAS

NOTAS

NOTAS



CUADERNO

249.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

ISBN 978-84-9728-259-8



9 788497 282598 >